**Теорема синусов**

**Теория**



**Теорема синусов:** стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.



Если известны одна сторона и два прилежащих угла, то с помощью теоремы синусов можно вычислить остальные две стороны треугольника. Например пусть известны сторона *a* и углы *γ* и *β*. С учетом того, что сумма всех углов треугольника равна 180 градусов, угол *α* будет равен:



Тогда остальные стороны вычисляются по следующим формулам:



**Теорема 1.** Теорема синусов. **Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.**

Доказательство. Пусть ABC — треугольник со сторонами *a*,*b*,*c* и противолежащими углами *α*,*β*,*γ* (рис.1, а).



Рис.1

Докажем, что

*a*sin*α*=*b*sin*β*=*c*sin*γ*

Опустим из вершины С высоту CD. Из прямоугольного треугольника ACD, если угол *α* острый, получаем: *CD*=*b*sin*α* (рис.1, б). Если угол *α* тупой, то *CD*=*b*sin(180°−*α*)=*b*sin*α* (рис.1, в). Так же из треугольника BCD получаем: *CD*=*a*sin*β* . Итак, *a*sin*β*=*b*sin*α* . Отсюда

*a*sin*α*=*b*sin*β*

Аналогично доказывается равенство

*b*sin*β*=*c*sin*γ*

Для доказательства надо провести высоту треугольника из вершины А. Теорема доказана.

Следствие 1.

*a*sin*α*=*b*sin*β*=*c*sin*γ*=2*R*

**, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.**

**Пример 1.** В треугольнике ABC угол *α* равен 30°, угол *β* равен 30°. Найти отношение а:с.

***Решение.*** По теореме синусов

*a*sin*α*=*c*sin*γ*

Используя теорему о сумме внутренних углов треугольника, имеем

*γ*=180°−(30°+30°)=120°

Так как

*sin*120°=*sin*(180°−60°)=*sin*60°=3√2

 , то *a*12=*c*3√2 , или *a*:с=1:3√

**Пример 2.** В треугольнике две стороны 20 м и 21 м, а синус острого угла а между ними равен 0,6. Найти третью сторону а.

***Решение.*** Угол *α* острый, следовательно, cos*α*>0 . Найдем его, используя тождество sin2*α*+cos2*α*=1 :

cos*α*=1−sin2*α*−−−−−−−−√=1−0,36−−−−−−−√=0,8

Теперь по теореме косинусов имеем:

*a*2=202+212−2∙20∙21∙0,8=169

откуда а = 13 м.

**Пример 3.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB, боковая сторона AC = b, угол лежащий против основания 2. Найдите радиус описанной окружности (составьте алгоритм решения задачи).

****

**Решение:**



**Пример 4.**

Сторона АВ треугольника ABC равна 16см. Угол А равен 30 градусам. Угол В равен 105 градусам. Вычислите длину стороны ВС.


**Решение**.
Согласно теореме синусов, стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:
a / sin α = b / sin β = c / sin γ

Таким образом
BC / sin α = AB / sin γ

Величину угла С найдем, исходя из того, сумма углов треугольника равна 180 градусам.
С = 180 - 30 -105 = 45 градусов.

Откуда:
BC / sin 30° = 16 / sin 45°

BC = 16 sin 30° /  sin 45°

Обратившись к [таблице тригонометрических функций](http://profmeter.com.ua/communication/learning/course/course7/lesson228/), находим:

BC = ( 16 \* 1 / 2 ) / √2/2 = 16 / √2 ≈ 11,3 см

**Ответ**: 16 / √2

**Пример 5.**
В треугольнике ABC угол А = α, угол С = β, ВС = 7см, ВН - высота треугольника.
Найти АН


**Решение**.
Для решения задачи воспользуемся теоремой синусов. Из нее следует, что:

BC / sin α = AB / sin β

то есть
7 / sin α = AB / sin β
AB = 7 sin β / sin α

Теперь рассмотрим треугольник ABH. По условию задачи BH - высота, значит он является прямоугольным. Угол AHB = 90 градусам.
Тогда угол ABH = 180 - 90 - α. = 90 - α.
Для него будет верно соотношение:

AB / sin 90 = AH / sin (90 - α)

Из таблицы значений тригонометрических функций учтем что sin 90 = 1, тогда

AB = AH / sin (90 - α)

Из формул приведения тригонометрических функций учтем что sin( 90 - α ) = cos α, тогда

AB = AH / cos α

Подставим значение AB

7 sin β / sin α = AH / cos α
AH sin α = 7 sin β cos α
AH = 7 sin β cos α / sin α

Из тех же тригонометрических тождеств выясним, что cos α / sin α = ctg α, тогда

AH = 7 sin β ctg α

**Ответ**: 7 sin β ctg α