

**Производная функции**

[[править](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=0)]

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

[Стабильная версия](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&stable=1) была [проверена](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:%D0%96%D1%83%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8B&type=review&page=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) *4 марта 2013*. Имеются непроверенные [изменения в шаблонах или файлах](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&oldid=52985242&diff=cur&diffonly=0).



[Стабильная версия](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&stable=1) была [проверена](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:%D0%96%D1%83%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8B&type=review&page=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) *4 марта 2013*. Имеются непроверенные [изменения в шаблонах или файлах](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&oldid=52985242&diff=cur&diffonly=0).

Перейти к: [навигация](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#mw-head), [поиск](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#p-search)

*У этого термина существуют и другие значения, см.* [*Производная*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F)*.*





Иллюстрация понятия производной

**Произво́дная** (функции в точке) — основное понятие [дифференциального исчисления](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5), характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как [предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) отношения приращения функции к приращению ее [аргумента](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) при стремлении приращения аргумента к [нулю](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D0%BB%D1%8C_%28%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE%29), если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется **дифференци́рованием**. Обратный процесс — нахождение [первообразной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%8F) — [интегрирование](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

|  |
| --- |
| **Содержание**[[убрать](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD)] * [1 История](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.98.D1.81.D1.82.D0.BE.D1.80.D0.B8.D1.8F)
* [2 Определение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9E.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D0.B5)
	+ [2.1 Определение производной функции через предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9E.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D0.B5_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D0.BE.D0.B9_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B8_.D1.87.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.B7_.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB)
	+ [2.2 Общепринятые обозначения производной функции в точке](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9E.D0.B1.D1.89.D0.B5.D0.BF.D1.80.D0.B8.D0.BD.D1.8F.D1.82.D1.8B.D0.B5_.D0.BE.D0.B1.D0.BE.D0.B7.D0.BD.D0.B0.D1.87.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D0.BE.D0.B9_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B8_.D0.B)
* [3 Дифференцируемость](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.94.D0.B8.D1.84.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BD.D1.86.D0.B8.D1.80.D1.83.D0.B5.D0.BC.D0.BE.D1.81.D1.82.D1.8C)
* [4 Замечания](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.97.D0.B0.D0.BC.D0.B5.D1.87.D0.B0.D0.BD.D0.B8.D1.8F)
* [5 Геометрический и физический смысл производной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.93.D0.B5.D0.BE.D0.BC.D0.B5.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.87.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.B8.D0.B9_.D0.B8_.D1.84.D0.B8.D0.B7.D0.B8.D1.87.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.B8.D0.B9_.D1.81.D0.BC.D1.8B.D1.81.D0.BB_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D0.BE.D0.B9)
	+ [5.1 Тангенс угла наклона касательной прямой](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.A2.D0.B0.D0.BD.D0.B3.D0.B5.D0.BD.D1.81_.D1.83.D0.B3.D0.BB.D0.B0_.D0.BD.D0.B0.D0.BA.D0.BB.D0.BE.D0.BD.D0.B0_.D0.BA.D0.B0.D1.81.D0.B0.D1.82.D0.B5.D0.BB.D1.8C.D0.BD.D0.BE.D0.B9_.D0.BF.D1.80.D1.8F.D0.BC.D0.BE.D0.B9)
	+ [5.2 Скорость изменения функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.A1.D0.BA.D0.BE.D1.80.D0.BE.D1.81.D1.82.D1.8C_.D0.B8.D0.B7.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B8)
* [6 Производные высших порядков](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9F.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D1.8B.D1.81.D1.88.D0.B8.D1.85_.D0.BF.D0.BE.D1.80.D1.8F.D0.B4.D0.BA.D0.BE.D0.B2)
* [7 Способы записи производных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.A1.D0.BF.D0.BE.D1.81.D0.BE.D0.B1.D1.8B_.D0.B7.D0.B0.D0.BF.D0.B8.D1.81.D0.B8_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D1.85)
* [8 Примеры](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9F.D1.80.D0.B8.D0.BC.D0.B5.D1.80.D1.8B)
* [9 Правила дифференцирования](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9F.D1.80.D0.B0.D0.B2.D0.B8.D0.BB.D0.B0_.D0.B4.D0.B8.D1.84.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BD.D1.86.D0.B8.D1.80.D0.BE.D0.B2.D0.B0.D0.BD.D0.B8.D1.8F)
* [10 Таблица производных некоторых функций](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.A2.D0.B0.D0.B1.D0.BB.D0.B8.D1.86.D0.B0_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D1.85_.D0.BD.D0.B5.D0.BA.D0.BE.D1.82.D0.BE.D1.80.D1.8B.D1.85_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B9)
* [11 Производная вектор-функции по параметру](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9F.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D0.B2.D0.B5.D0.BA.D1.82.D0.BE.D1.80-.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B8_.D0.BF.D0.BE_.D0.BF.D0.B0.D1.80.D0.B0.D0.BC.D0.B5.D1.82.D1.80.D1.83)
* [12 См. также](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.A1.D0.BC._.D1.82.D0.B0.D0.BA.D0.B6.D0.B5)
* [13 Примечания](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9F.D1.80.D0.B8.D0.BC.D0.B5.D1.87.D0.B0.D0.BD.D0.B8.D1.8F)
* [14 Литература](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#.D0.9B.D0.B8.D1.82.D0.B5.D1.80.D0.B0.D1.82.D1.83.D1.80.D0.B0)
 |

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=1)**] История**

В классическом [дифференциальном исчислении](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) производная чаще всего определяется через понятия [теории пределов](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2), однако исторически теория пределов появилась позже дифференциального исчисления.

Русский термин «производная функции» впервые употребил [В. И. Висковатов](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%B2%2C_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%B9_%D0%98%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87).[[1]](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#cite_note-1)

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=2)**] Определение**

Пусть в некоторой [окрестности](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) [точки](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_%28%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F%29) определена [функция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) Производной функции называется такое число , что функцию в окрестности можно представить в виде



если существует.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=3)**] Определение производной функции через** [**предел**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8)

Пусть в некоторой [окрестности](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) [точки](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_%28%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F%29) определена [функция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) Производной функции в точке называется [предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8), если он существует,



**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=4)**] Общепринятые обозначения производной функции в точке **



Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в [теоретической механике](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0)).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=5)**] Дифференцируемость**

*Основная статья:* [***Дифференцируемая функция***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D1%83%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F)

Производная функции в точке , будучи пределом, может не существовать или существовать и быть конечной или бесконечной. Функция является дифференцируемой в точке тогда и только тогда, когда её производная в этой точке существует и конечна:



Для дифференцируемой в функции в окрестности справедливо представление

при 

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=6)**] Замечания**

* Назовём [приращением](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%B0%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) аргумента функции, а приращением значения функции в точке Тогда



* Пусть функция имеет конечную производную в каждой точке Тогда определена **произво́дная фу́нкция**



* Функция, имеющая производную в точке, [непрерывна](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) в ней. Обратное не всегда верно.
* Если производная функция сама является непрерывной, то функцию называют **непреры́вно дифференци́руемой** и пишут: 

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=7)**] Геометрический и физический смысл производной**

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=8)**] Тангенс угла наклона касательной прямой**





Геометрический смысл производной. На [графике функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D0%BA_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) выбирается [абсцисса](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D1%86%D0%B8%D1%81%D1%81%D0%B0) *x0* и вычисляется соответствующая [ордината](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%B0) *f(x0)*. В окрестности точки *x0* выбирается произвольная точка *x*. Через соответствующие точки на графике функции F проводится [секущая](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B5%D0%BA%D1%83%D1%89%D0%B0%D1%8F) (первая светло-серая линия C5). Расстояние *Δx = x — x0* устремляется к нулю, в результате секущая переходит в [касательную](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%81%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F) (постепенно темнеющие линии C5 — C1). [Тангенс](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%81) угла α наклона этой касательной — и есть производная в точке *x0*.

*Основная статья:* [***Касательная прямая***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%81%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B0%D1%8F)

Если функция имеет конечную производную в точке то в окрестности её можно приблизить [линейной функцией](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F)



Функция называется касательной к в точке Число является угловым коэффициентом или [тангенсом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%81) [угла](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%B3%D0%BE%D0%BB) [наклона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D0%BA%D0%BB%D0%BE%D0%BD) касательной прямой.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=9)**] Скорость изменения функции**

Пусть — закон прямолинейного [движения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B2%D0%B8%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5). Тогда выражает [мгновенную скорость](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B3%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) движения в момент времени Вторая производная выражает [мгновенное ускорение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B3%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) в момент времени 

Вообще производная функции в точке выражает скорость изменения функции в точке , то есть скорость протекания [процесса](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81%D1%81), описанного зависимостью 

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=10)**] Производные высших порядков**

Понятие производной произвольного порядка задаётся [рекуррентно](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%D0%B8%D1%8F). Полагаем



Если функция дифференцируема в , то производная первого порядка определяется соотношением



Пусть теперь производная -го порядка определена в некоторой окрестности точки и дифференцируема. Тогда



Если функция имеет в некоторой области D [частную производную](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) по одной из переменных, то названная производная, сама являясь функцией от может иметь в некоторой точке частные производные по той же или по любой другой переменной. Для исходной функции эти производные будут частными производными второго порядка (или вторыми частными производными).

или 

или 

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется [смешанной частной производной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BC%D0%B5%D1%88%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F). Например,



**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=11)**] Способы записи производных**

В зависимости от целей, области применения и используемого математического аппарата используют различные способы записи производных. Так, производная n-го порядка может быть записана в нотациях:

* [Лагранжа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%2C_%D0%96%D0%BE%D0%B7%D0%B5%D1%84_%D0%9B%D1%83%D0%B8) , при этом для малых n часто используют штрихи и римские цифры:







и т. д.

Такая запись удобна своей краткостью и широко распространена; однако штрихами разрешается обозначать не выше третьей производной.

* [Лейбница](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86%2C_%D0%93%D0%BE%D1%82%D1%84%D1%80%D0%B8%D0%B4_%D0%92%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC), удобная наглядной записью отношения бесконечно малых (только в случае, если — независимая переменная; в противном случае обозначение верно лишь для производной первого порядка):



* [Ньютона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%2C_%D0%98%D1%81%D0%B0%D0%B0%D0%BA), которая часто используется в механике для производной по времени функции координаты (для пространственной производной чаще используют запись Лагранжа). Порядок производной обозначается числом точек над функцией, например:

— производная первого порядка по при , или — вторая производная по в точке и т. д.

* [Эйлера](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B9%D0%BB%D0%B5%D1%80%2C_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4), использующая [дифференциальный оператор](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80) (строго говоря, дифференциальное выражение, пока не введено соответствующее функциональное пространство), и потому удобная в вопросах, связанных с [функциональным анализом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7):

, или иногда .

* В вариационном исчислении и математической физике часто применяется обозначение , ; для значения производной в точке — . Для частных производных обозначение то же, поэтому смысл обозначения определяют из контекста.

Конечно, при этом необходимо не забывать, что служат все они для обозначения одних и тех же объектов:



**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=12)**] Примеры**

* Пусть . Тогда



* Пусть . Тогда если то



где обозначает [функцию знака](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_sgn%28x%29). Если то а следовательно не существует.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=13)**] Правила дифференцирования**

Операция нахождения производной называется дифференцированием. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

* 
* 
* [[2]](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#cite_note-2)
* [[3]](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#cite_note-3)
* 
* …(g ≠ 0)
* (g ≠ 0)
* Если функция задана параметрически:

![\left\{\begin{matrix}x=x(t),\\y=y(t),\end{matrix}\; \; t\in\left[T_1; T_2 \right] \right.](), то 

*Основная статья:* [***Дифференцирование сложной функции***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8)

* 
* Формулы производной произведения и отношения обобщаются на случай n-кратного дифференцирования ([формула Лейбница](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B0_%28%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29)):

где — [биномиальные коэффициенты](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82).

**Следующие свойства производной служат дополнением к правилам дифференцирования:**

* если функция дифференцируема на интервале , то она непрерывна на интервале . Обратное, вообще говоря, неверно (например, функция на ![[-1,1]]());
* если функция имеет локальный [максимум/минимум](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%BC%D1%83%D0%BC) при значении аргумента, равном , то (это так называемая [лемма Ферма](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%BC%D0%BC%D0%B0_%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0));
* производная данной функции единственна, но у разных функций могут быть одинаковые производные.
* 

Доказательство [показать]









[■](http://ru.wikipedia.org/wiki/Q.E.D.)

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=14)**] Таблица производных некоторых функций**

*Основная статья:* [***Таблица производных***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B0%D0%B1%D0%BB%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D1%8B%D1%85)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Функция ~f(x)** | **Производная ~f'(x)** | **Примечание** |
| ~x^\alpha | ~\alpha \cdot x^{\alpha-1} | Доказательство [показать]Фиксируем x \in \mathbb{D}(f), придадим приращение аргументу ~\Delta x. Вычислим приращение функции: \Delta y=(x+\Delta x)^\alpha -x^\alpha=x^\alpha((1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha -1), т.о (x^\alpha)'= \lim_{\Delta x \to 0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x \to 0}{\frac{x^\alpha((1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha -1)}{\Delta x}}=[См.](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE_%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D0%B0%D1%8F_%D0%B8_%D0%B1%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE_%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B0%D1%8F#.D0.AD.D0.BA.D0.B2.D0.B8.D0.B2.D0.B0.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D1.82.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D0.B5.D0.BB.D0.B8.D1.87.D0.B8.D0.BD.D1.8B)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\alpha\cdot x^\alpha\cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\alpha \cdot x^{\alpha-1} |
| ~a^x | ~a^x\cdot\ln {a} | Доказательство [показать]Фиксируем x \in \mathbb{D}(f), придадим приращение аргументу ~\Delta x. Вычислим приращение функции: ~\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1), т.о (a^x)'= \lim_{\Delta x \to 0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x \to 0}{\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}}=[См.](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE_%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D0%B0%D1%8F_%D0%B8_%D0%B1%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE_%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B0%D1%8F#.D0.AD.D0.BA.D0.B2.D0.B8.D0.B2.D0.B0.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D1.82.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D0.B5.D0.BB.D0.B8.D1.87.D0.B8.D0.BD.D1.8B)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^x\cdot\Delta x \cdot \ln {a }}{\Delta x}=a^x\cdot\ln {a} |
| ~\log_a {x} | ~\frac{1}{x\cdot \ln {a}} |  |
| ~\sin x | ~\cos x |  |
| ~\cos x | ~-\sin x |  |
| ~ \mathrm{tg}\ x | ~\frac{1}{\cos^2{x}} |  |
| ~ \mathrm{ctg}\ x | ~-\frac{1}{\sin^2{x}} |  |
| ~\arcsin{x} | \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |  |
| ~\arccos{x} | -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |  |
| ~ \mathrm{arctg}\ x | ~\frac{1}{1+x^2} |  |
| ~ \mathrm{arcctg}\ x | ~-\frac{1}{1+x^2} |  |
| ~ \mathrm{sh}\ x | ~ \mathrm{ch}\ x |  |
| ~ \mathrm{ch}\ x | ~ \mathrm{sh}\ x |  |
| ~ \mathrm{th}\ x | ~\frac{1}{\mathrm{ch}^2\ x} |  |
| ~ \mathrm{cth}\ x | ~-\frac{1}{\mathrm{sh}^2\ x} |  |

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=15)**] Производная вектор-функции по параметру**

Определим производную [вектор-функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80-%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) по параметру:

.

Если производная в точке существует, вектор-функция называется дифференцируемой в этой точке. Координатными функциями для производной будут .

Свойства производной вектор-функции (всюду предполагается, что производные существуют):

* — производная суммы есть сумма производных.
* — здесь — дифференцируемая скалярная функция.
* — дифференцирование [скалярного произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).
* ![\frac{d}{dt} [\mathbf{r_1}(t)\mathbf{r_2}(t)]=\left [\frac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}\mathbf{r_2}(t)\right ] + \left [\mathbf{r_1}(t) \frac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}\right]]()— дифференцирование [векторного произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).
* — дифференцирование [смешанного произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BC%D0%B5%D1%88%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

 **[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=17)**] Примечания**

1. [**↑**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#cite_ref-1) [Горный университет. Кафедра высшей математики](http://www.spmi.ru/ffgd/vm)
2. [**↑**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#cite_ref-2) Производная суммы равна сумме производных
3. [**↑**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD_%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD%EF%BF%BD#cite_ref-3) Отсюда, в частности, следует, что производная произведения функции и константы равна произведению производной этой функции на константу

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=18)**] Литература**

* *В. Г. Болтянский,* [Что такое дифференцирование?](http://plm.mccme.ru/ann/a17.htm), [«Популярные лекции по математике»](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BF%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8_%D0%BF%D0%BE_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B5), Выпуск 17, Гостехиздат 1955 г., 64 стр.
* *В. А. Гусев*, *А. Г. Мордкович* «Математика»
* *Г. М. Фихтенгольц* «Курс дифференциального и интегрального исчисления», том 1
* *В. М. Бородихин*, [Высшая математика](http://ciu.nstu.ru/kaf/vm/a/file_get/123265?nomenu=1), учеб. пособие, [ISBN 5-7782-0422-1](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F%3A%D0%98%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8_%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3/5778204221)

Источник — «<http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Производная_функции&oldid=52985242>» КатегорияДифференциальное исчисление

**Производная (обобщения)**

[[править](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29&action=edit&section=0)]

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Перейти к: [навигация](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#mw-head), [поиск](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#p-search)

*У этого термина существуют и другие значения, см.* [*Производная*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F)*.*

В [математике](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) существует много различных обобщений понятия [**производной**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8), так как она является базовой конструкцией [дифференциального исчисления](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

|  |
| --- |
| **Содержание**[[убрать](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29)] * [1 Односторонние производные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.9E.D0.B4.D0.BD.D0.BE.D1.81.D1.82.D0.BE.D1.80.D0.BE.D0.BD.D0.BD.D0.B8.D0.B5_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D0.B5)
* [2 Анализ функций нескольких переменных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.90.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D0.B8.D0.B7_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B9_.D0.BD.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.BE.D0.BB.D1.8C.D0.BA.D0.B8.D1.85_.D0.BF.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D1.85)
* [3 Производные высшего и дробного порядка](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.9F.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D1.8B.D1.81.D1.88.D0.B5.D0.B3.D0.BE_.D0.B8_.D0.B4.D1.80.D0.BE.D0.B1.D0.BD.D0.BE.D0.B3.D0.BE_.D0.BF.D0.BE.D1.80.D1.8F.D0.B4.D0.BA.D0.B0)
	+ [3.1 Производные высшего порядка в анализе функций нескольких переменных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.9F.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D1.8B.D1.81.D1.88.D0.B5.D0.B3.D0.BE_.D0.BF.D0.BE.D1.80.D1.8F.D0.B4.D0.BA.D0.B0_.D0.B2_.D0.B0.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D0.B8.D0.B7.D0.B5_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B9_.D0.BD.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.BE.D0.BB.D1.8C.D0.BA.D0.B8.D1.85_.D0.BF.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D1.85)
* [4 Алгебра](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.90.D0.BB.D0.B3.D0.B5.D0.B1.D1.80.D0.B0)
* [5 Дифференциальная топология](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.94.D0.B8.D1.84.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BD.D1.86.D0.B8.D0.B0.D0.BB.D1.8C.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D1.82.D0.BE.D0.BF.D0.BE.D0.BB.D0.BE.D0.B3.D0.B8.D1.8F)
* [6 Дифференциальная геометрия](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.94.D0.B8.D1.84.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BD.D1.86.D0.B8.D0.B0.D0.BB.D1.8C.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D0.B3.D0.B5.D0.BE.D0.BC.D0.B5.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.8F)
* [7 Анализ функций комплексного переменного](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.90.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D0.B8.D0.B7_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B9_.D0.BA.D0.BE.D0.BC.D0.BF.D0.BB.D0.B5.D0.BA.D1.81.D0.BD.D0.BE.D0.B3.D0.BE_.D0.BF.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D0.BD.D0.BE.D0.B3.D0.BE)
* [8 Функциональный анализ](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.A4.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.BE.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D1.8C.D0.BD.D1.8B.D0.B9_.D0.B0.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D0.B8.D0.B7)
* [9 Алгебраическая геометрия](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.90.D0.BB.D0.B3.D0.B5.D0.B1.D1.80.D0.B0.D0.B8.D1.87.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.B0.D1.8F_.D0.B3.D0.B5.D0.BE.D0.BC.D0.B5.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.8F)
* [10 Квантовые группы](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.9A.D0.B2.D0.B0.D0.BD.D1.82.D0.BE.D0.B2.D1.8B.D0.B5_.D0.B3.D1.80.D1.83.D0.BF.D0.BF.D1.8B)
* [11 Другие обобщения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.94.D1.80.D1.83.D0.B3.D0.B8.D0.B5_.D0.BE.D0.B1.D0.BE.D0.B1.D1.89.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F)
* [12 Нуждающиеся в определении](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.9D.D1.83.D0.B6.D0.B4.D0.B0.D1.8E.D1.89.D0.B8.D0.B5.D1.81.D1.8F_.D0.B2_.D0.BE.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D0.B8)
* [13 См. также](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29#.D0.A1.D0.BC._.D1.82.D0.B0.D0.BA.D0.B6.D0.B5)
 |

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=1)**] Односторонние производные**

[Правосторонний предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB)



называется **правосторо́нней произво́дной** или **произво́дной спра́ва** и обозначается символами



Аналогично, [левосторонний предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB)



называется **левосторо́нней произво́дной** или **произво́дной сле́ва** и обозначается символами



Пусть дана функция Тогда существует конечная производная тогда и только тогда, когда существуют конечные и равные односторонние производные , так как по свойству пределов функции, согласно которому для существования предела необходимо, чтобы оба его односторонних предела существовали и были равны, имеем: если , то существует ,что является производной функции в точке , при этом .

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=2)**] Анализ функций нескольких переменных**

Одна из простейших ситуаций, в которых возможно обобщение — это вектор-функции нескольких переменных (наиболее часто область определения представляет собой векторное пространство). Это является предметом изучения [анализа функций нескольких переменных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%85_%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85).

[**Частная производная**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) определяется практически идентично производной одиночной вещественной функции, за исключением того, что она распознаёт выбор независимой переменной, который был сделан.

[**Полная производная**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) функции используется для индикации того, что функция может иметь и явную и неявную зависимость от переменной. Полная производная должна принимать во внимание оба возможных источника изменения, тогда как частная производная должна видеть только явную зависимость.

[**Производная Лагранжа**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%D0%B0) принимает во внимание изменения вследствие зависимости от времени и движения через пространство по векторному полю.

Для вещественнозначных функций из в , [**градиент**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82) производит вектор, каждый компонент которого является частной производной. Это может быть использовано для вычисления [**производных направлений**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F) [скалярных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80) функций или направлений нормалей.

Для векторнозначных функций в , [дивергенция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F) (расходимость) даёт меру того, как силён «источник» или «сток» в этой точке. Она может быть использована для вычисления потока при помощи [теоремы о дивергенции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BE_%D0%B4%D0%B8%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B8).

Для векторнозначных функций в , [**ротор**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D1%82%D0%BE%D1%80_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) измеряет «вращение» векторного поля в этой точке.

Для любой функции из в , [**матрица Якоби**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%B8) — это матрица, содержащая все частные производные всех компонент функции. Без неё невозможно совершить преобразование координат. Её [определитель](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C) (также называемые **якобианом**) появляется как множитель при [замене переменных](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%97%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B0_%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85&action=edit&redlink=1) в формуле [интегрирования](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=3)**] Производные высшего и дробного порядка**

Другое простое обобщение, которое можно произвести, — это применить её больше, чем один раз, получая в результате производную второго (и выше) порядка, как определено в [статье о производных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8). Этот способ может быть обобщён.

В добавок к производным -ого порядка для любого [натурального числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) , используя различные методы, возможно ввести производные в дробных степенях, получая при этом так называемые [производные дробного порядка](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F). Производные отрицательных порядков будут соответствовать интегрированию, откуда появляется термин [дифферинтеграл](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB). Изучение различных возможных определений и записей производных ненатуральных порядков известно под названием [**дробное исчисление**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=4)**] Производные высшего порядка в анализе функций нескольких переменных**

Существует несколько различных векторнозначимых и скалярнозначимых производных второго порядка в анализе функций нескольких переменных.

[**Лапласиан**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%B0%D0%BD) — это [дивергенция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F) (расходимость) [градиента](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82) [скалярной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80) функции на . [**Д’Аламбертиан**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%94%E2%80%99%D0%90%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D0%B1%D0%B5%D1%80%D0%B0) — определяется аналогично лапласиану, но используя неопределённую [метрику](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B0) [пространства Минковского](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE_%D0%9C%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE), вместо [скалярного произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) в [евклидовом пространстве](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) .

[**Матрица Гессе**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%B0%D0%BD_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8#.D0.9C.D0.B0.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.86.D0.B0_.D0.93.D0.B5.D1.81.D1.81.D0.B5) — это матрица частных производных второго порядка скалярной функции, используемая для вычислений в [теории Морса](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%9C%D0%BE%D1%80%D1%81%D0%B0).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=5)**] Алгебра**

[**Производная**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%B0%D0%B1%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)&action=edit&redlink=1) в абстрактной алгебре — это линейное отображение на [кольце](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%86%D0%BE_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) или [алгебре](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0_%D0%BD%D0%B0%D0%B4_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%BC), которое удовлетворяет закону Лейбница ([правилу произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)). Они изучаются в чистой алгебраической постановке в [дифференциальной теории Галуа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%93%D0%B0%D0%BB%D1%83%D0%B0), но также появляются во многих других областях, где они часто употребляются с менее строгими алгебраическими определениями производных.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=6)**] Дифференциальная топология**

В [дифференциальной топологии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F), [**векторное поле**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%B5) может быть определено как дифференцирование на кольце [гладких функций](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) на [многообразии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5), а [касательный вектор](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%81%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80) может быть определён как производная в точке. Это позволяет абстрагироваться от записи направленной производной скалярной функции и перейти к общим многообразиям. Для многообразий, которые являются [подмножествами](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) , этот касательный вектор будет аналогичен направленной производной определённой выше.

[**Пушфорвард**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%83%D1%88%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B4&action=edit&redlink=1) отображения между многообразиями — это порождённое отображение между касательными пространствами этих отображений. Оно является абстракцией [якобиана](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%B8).

На [внешней алгебре](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%BD%D0%B5%D1%88%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0) [дифференциальных форм](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0) над [гладким многообразием](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5), [**внешняя производная**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0#.D0.A1.D0.B2.D1.8F.D0.B7.D0.B0.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.BE.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F) это уникальное линейное отображение, которое удовлетворяет порядковой версии закона Лейбница и при возведении в квадрат равно нулю. Это производная 1 порядка на внешней алгебре.

[**Производная Ли**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9B%D0%B8) — это скорость изменения одного векторного поля в направлении другого векторного поля. Это пример применения [скобки Ли](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%BA%D0%B0_%D0%9B%D0%B8) (векторные поля образуют [алгебру Ли](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0_%D0%9B%D0%B8) на [группе диффеоморфизмов](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%93%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%BC%D0%BE%D0%B2&action=edit&redlink=1) многообразия). Это производная 0 порядка на алгебре.

[**Внутренняя производная**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0#.D0.A1.D0.B2.D1.8F.D0.B7.D0.B0.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.BE.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F) — это производная «-1» порядка на внешней алгебре форм. Вместе, внешняя производная, производная Ли, и внутренняя производная образуют [супералгебру Ли](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D1%83%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0_%D0%9B%D0%B8&action=edit&redlink=1).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=7)**] Дифференциальная геометрия**

В [дифференциальной геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) (и вытекающем из неё [тензорном анализе](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BD%D0%B7%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7)), с помощью [**ковариантной производной**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) берутся производные по направлениям векторных полей вдоль [кривых](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D1%8F) или вообще в криволинейной системе координат. Это расширяет производную по направлению скалярных функций до сечений [векторных расслоений](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) или [главных расслоений](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BB%D0%BE%D1%91%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE&action=edit&redlink=1). В [римановой геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) существование метрики позволяет сделать канонический выбор свободной от [кручения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%80%D1%8C_%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%B2_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B8_%D0%B3%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF) ковариантной производной, известной как [связность Леви-Чивита](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B2%D1%8F%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%9B%D0%B5%D0%B2%D0%B8-%D0%A7%D0%B8%D0%B2%D0%B8%D1%82%D0%B0).

[**Внешняя ковариантная производная**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%92%D0%BD%D0%B5%D1%88%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F&action=edit&redlink=1) расширяет внешнюю производную на векторно-значимые формы.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=8)**] Анализ функций комплексного переменного**

В [комплексном анализе](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7), центральными объектами изучения являются [голоморфные функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F), которые являются комплекснозначными функциями на плоскости [комплексных чисел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) и удовлетворяющие соответственно расширенному определению дифференцируемости.

[**Производная Шварца**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%A8%D0%B2%D0%B0%D1%80%D1%86%D0%B0) описывает, как комплексная функция аппроксимируется [кусочно-линейным отображением](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D1%83%D1%81%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%BE-%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5&action=edit&redlink=1), преимущественно тем же самым способом, каким обычная производная описывает, как функция аппроксимируется линейным отображением.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=9)**] Функциональный анализ**

В [функциональном анализе](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7) [**производная Гато**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%93%D0%B0%D1%82%D0%BE) расширяет концепцию [производной по направлению](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8E) на локально выпуклые [топологические векторные пространства](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE). [**Производная Фреше**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%A4%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B5) позволяет расширить понятие производной на произвольное [банахово пространство](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE).

В [теории меры](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BC%D0%B5%D1%80%D1%8B) [**производная Радона — Никодима**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%BD%D0%B0_%E2%80%94_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%B0) обобщает [якобиан](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D0%B0%D0%BD), использовавшийся для изменяющихся переменных, на меры. Она выражает одну меру в терминах другой меры (при некоторых условиях).

Производная также допускает обобщение на пространстве [**обобщенных функций**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F), используя [интегрирование по частям](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE_%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8F%D0%BC) в соответствующем хорошо устроенном подпространстве.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=10)**] Алгебраическая геометрия**

В [алгебраической геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) [**кэлеров дифференциал**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D1%8D%D0%BB%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%B2_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB&action=edit&redlink=1) позволяет расширирить определение внешней производной на произвольные [алгебраические многообразия](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5), вместо просто [гладких](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5) [многообразий](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=11)**] Квантовые группы**

В области [квантовых групп](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0) [**-производная**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Q-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F&action=edit&redlink=1) — это [-деформация](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Q-%D0%B4%D0%B5%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F&action=edit&redlink=1) обычной производной функции.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=12)**] Другие обобщения**

Вполне можно скомбинировать два или больше различных понятий расширения или абстракции простой производной. Например, в [геометрии Финслера](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%A4%D0%B8%D0%BD%D1%81%D0%BB%D0%B5%D1%80%D0%B0) изучаются пространства, которые [локально](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9B%D0%BE%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE&action=edit&redlink=1) выглядят как [банаховы пространства](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE). Таким образом можно создать производную с некоторыми особенностями [функциональной производной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) и [ковариантной производной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=13)**] Нуждающиеся в определении**

* [Производная Дини](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B8&action=edit&redlink=1)
* [Производная Гато](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%93%D0%B0%D1%82%D0%BE)
* [Матричное исчисление](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5&action=edit&redlink=1)
* [Производная Пинкерля](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9F%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%B5%D1%80%D0%BB%D1%8F&action=edit&redlink=1)
* [Параметрическая производная](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F&action=edit&redlink=1)
* [Полу-дифференцируемость](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%83-%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D1%83%D0%B5%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C&action=edit&redlink=1)

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=14)**] См. также**

* [Дифференциал](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB)
* [Односторонняя производная](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F)
* [Производная Пеано](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9F%D0%B5%D0%B0%D0%BD%D0%BE)
* [Производная Радона — Никодима](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%BD%D0%B0_%E2%80%94_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%B0)
* [Производная по направлению](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8E)
* [Контингенция и паратингенция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5#.D0.A1.D0.B2.D1.8F.D0.B7.D0.B0.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.BF.D0.BE.D0.BD.D1.8F.D1.82.D0.B8.D1.8F)
* Исполнитель:
* Студентка группы М-33 Грабовец А.Ю.
* Научный руководитель:
* Канд. физ-мат. наук, доцент Лебедева М.Т.
* Гомель 2007
* **Содержание**
* Введение
* 1. Различные подходы к трактовке понятия функции в курсе математики в средней школе
* 2. Основные направления введения понятия функции в школьном курсе математики
* 3. Методика формирования понятий общих свойств функций
* 4. Методическая схема изучения функций. Изучение функций в классе функций
* Заключение
* Литература