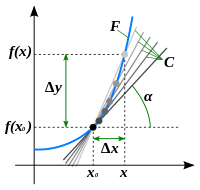
[](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Derivative_of_a_function.svg?uselang=ru)

**Производная функции**

[[править](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=0)]

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

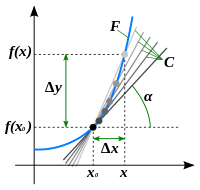
[Стабильная версия](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&stable=1) была [проверена](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:%D0%96%D1%83%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8B&type=review&page=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) *4 марта 2013*. Имеются непроверенные [изменения в шаблонах или файлах](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&oldid=52985242&diff=cur&diffonly=0).

Текущая версияпоказать/скрыть подробности

[Стабильная версия](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&stable=1) была [проверена](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:%D0%96%D1%83%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8B&type=review&page=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) *4 марта 2013*. Имеются непроверенные [изменения в шаблонах или файлах](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&oldid=52985242&diff=cur&diffonly=0).

Перейти к: [навигация](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#mw-head), [поиск](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#p-search)

*У этого термина существуют и другие значения, см.* [*Производная*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F)*.*

[](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Derivative_of_a_function.svg?uselang=ru)

[http://bits.wikimedia.org/static-1.21wmf10/skins/common/images/magnify-clip.png](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Derivative_of_a_function.svg)

Иллюстрация понятия производной

**Произво́дная** (функции в точке) — основное понятие [дифференциального исчисления](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5), характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как [предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) отношения приращения функции к приращению ее [аргумента](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) при стремлении приращения аргумента к [нулю](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D0%BB%D1%8C_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE)), если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется **дифференци́рованием**. Обратный процесс — нахождение [первообразной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%8F) — [интегрирование](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

|  |
| --- |
| **Содержание**  [[убрать](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8)]   * [1 История](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.98.D1.81.D1.82.D0.BE.D1.80.D0.B8.D1.8F) * [2 Определение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9E.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D0.B5)   + [2.1 Определение производной функции через предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9E.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D0.B5_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D0.BE.D0.B9_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B8_.D1.87.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.B7_.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB)   + [2.2 Общепринятые обозначения производной функции в точке](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9E.D0.B1.D1.89.D0.B5.D0.BF.D1.80.D0.B8.D0.BD.D1.8F.D1.82.D1.8B.D0.B5_.D0.BE.D0.B1.D0.BE.D0.B7.D0.BD.D0.B0.D1.87.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D0.BE.D0.B9_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B8_.D0.B) * [3 Дифференцируемость](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.94.D0.B8.D1.84.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BD.D1.86.D0.B8.D1.80.D1.83.D0.B5.D0.BC.D0.BE.D1.81.D1.82.D1.8C) * [4 Замечания](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.97.D0.B0.D0.BC.D0.B5.D1.87.D0.B0.D0.BD.D0.B8.D1.8F) * [5 Геометрический и физический смысл производной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.93.D0.B5.D0.BE.D0.BC.D0.B5.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.87.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.B8.D0.B9_.D0.B8_.D1.84.D0.B8.D0.B7.D0.B8.D1.87.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.B8.D0.B9_.D1.81.D0.BC.D1.8B.D1.81.D0.BB_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D0.BE.D0.B9)   + [5.1 Тангенс угла наклона касательной прямой](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.A2.D0.B0.D0.BD.D0.B3.D0.B5.D0.BD.D1.81_.D1.83.D0.B3.D0.BB.D0.B0_.D0.BD.D0.B0.D0.BA.D0.BB.D0.BE.D0.BD.D0.B0_.D0.BA.D0.B0.D1.81.D0.B0.D1.82.D0.B5.D0.BB.D1.8C.D0.BD.D0.BE.D0.B9_.D0.BF.D1.80.D1.8F.D0.BC.D0.BE.D0.B9)   + [5.2 Скорость изменения функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.A1.D0.BA.D0.BE.D1.80.D0.BE.D1.81.D1.82.D1.8C_.D0.B8.D0.B7.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B8) * [6 Производные высших порядков](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9F.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D1.8B.D1.81.D1.88.D0.B8.D1.85_.D0.BF.D0.BE.D1.80.D1.8F.D0.B4.D0.BA.D0.BE.D0.B2) * [7 Способы записи производных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.A1.D0.BF.D0.BE.D1.81.D0.BE.D0.B1.D1.8B_.D0.B7.D0.B0.D0.BF.D0.B8.D1.81.D0.B8_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D1.85) * [8 Примеры](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9F.D1.80.D0.B8.D0.BC.D0.B5.D1.80.D1.8B) * [9 Правила дифференцирования](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9F.D1.80.D0.B0.D0.B2.D0.B8.D0.BB.D0.B0_.D0.B4.D0.B8.D1.84.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BD.D1.86.D0.B8.D1.80.D0.BE.D0.B2.D0.B0.D0.BD.D0.B8.D1.8F) * [10 Таблица производных некоторых функций](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.A2.D0.B0.D0.B1.D0.BB.D0.B8.D1.86.D0.B0_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D1.85_.D0.BD.D0.B5.D0.BA.D0.BE.D1.82.D0.BE.D1.80.D1.8B.D1.85_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B9) * [11 Производная вектор-функции по параметру](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9F.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D0.B2.D0.B5.D0.BA.D1.82.D0.BE.D1.80-.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B8_.D0.BF.D0.BE_.D0.BF.D0.B0.D1.80.D0.B0.D0.BC.D0.B5.D1.82.D1.80.D1.83) * [12 См. также](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.A1.D0.BC._.D1.82.D0.B0.D0.BA.D0.B6.D0.B5) * [13 Примечания](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9F.D1.80.D0.B8.D0.BC.D0.B5.D1.87.D0.B0.D0.BD.D0.B8.D1.8F) * [14 Литература](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#.D0.9B.D0.B8.D1.82.D0.B5.D1.80.D0.B0.D1.82.D1.83.D1.80.D0.B0) |

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=1)**] История**

В классическом [дифференциальном исчислении](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) производная чаще всего определяется через понятия [теории пределов](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2), однако исторически теория пределов появилась позже дифференциального исчисления.

Русский термин «производная функции» впервые употребил [В. И. Висковатов](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%B2,_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%B9_%D0%98%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87).[[1]](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#cite_note-1)

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=2)**] Определение**

Пусть в некоторой [окрестности](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) [точки](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) x_0 \in \Rопределена [функция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) f\colon U(x_0) \subset \R \to \R.Производной функции называется такое число ~A, что функцию в окрестности  U(x_0) можно представить в виде

f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+o(h)

если ~Aсуществует.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=3)**] Определение производной функции через** [**предел**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8)

Пусть в некоторой [окрестности](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) [точки](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)) x_0 \in \Rопределена [функция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) f\colon U(x_0) \subset \R \to \R.Производной функции fв точке x_0называется [предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8), если он существует,

f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=4)**] Общепринятые обозначения производной функции y=f(x)в точке x_0**

f'(x_0) = f'_x(x_0)=\mathrm{D}\!f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x = x_0} = \dot{y}(x_0).

Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в [теоретической механике](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0)).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=5)**] Дифференцируемость**

*Основная статья:* [***Дифференцируемая функция***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D1%83%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F)

Производная ~f'(x_0)функции fв точке x_0, будучи пределом, может не существовать или существовать и быть конечной или бесконечной. Функция fявляется дифференцируемой в точке x_0тогда и только тогда, когда её производная в этой точке существует и конечна:

f \in \mathcal{D}(x_0)\Leftrightarrow\exists f'(x_0) \in (-\infty;\infty).

Для дифференцируемой в x_0функции fв окрестности U(x_0)справедливо представление

~f(x) = f(x_0) + f'(x_0) (x-x_0) + o(x-x_0)при x \to x_0.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=6)**] Замечания**

* Назовём \Delta x = x - x_0[приращением](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%B0%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) аргумента функции, а \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)приращением значения функции в точке x_0.Тогда

f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.

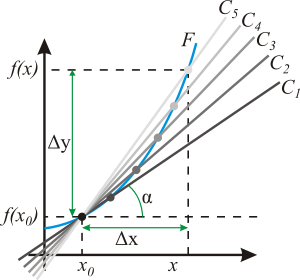
* Пусть функция f\colon(a,b) \to \Rимеет конечную производную в каждой точке x_0 \in (a,b).Тогда определена **произво́дная фу́нкция**

f'\colon(a,b) \to \R.

* Функция, имеющая производную в точке, [непрерывна](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) в ней. Обратное не всегда верно.
* Если производная функция сама является непрерывной, то функцию fназывают **непреры́вно дифференци́руемой** и пишут: f \in C^{(1)}\bigl((a,b)\bigr).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=7)**] Геометрический и физический смысл производной**

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=8)**] Тангенс угла наклона касательной прямой**

[](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Derivative-SVG.svg?uselang=ru)

[http://bits.wikimedia.org/static-1.21wmf10/skins/common/images/magnify-clip.png](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Derivative-SVG.svg)

Геометрический смысл производной. На [графике функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D0%BA_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) выбирается [абсцисса](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B1%D1%81%D1%86%D0%B8%D1%81%D1%81%D0%B0) *x0* и вычисляется соответствующая [ордината](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%B0) *f(x0)*. В окрестности точки *x0* выбирается произвольная точка *x*. Через соответствующие точки на графике функции F проводится [секущая](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B5%D0%BA%D1%83%D1%89%D0%B0%D1%8F) (первая светло-серая линия C5). Расстояние *Δx = x — x0* устремляется к нулю, в результате секущая переходит в [касательную](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%81%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F) (постепенно темнеющие линии C5 — C1). [Тангенс](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%81) угла α наклона этой касательной — и есть производная в точке *x0*.

*Основная статья:* [***Касательная прямая***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%81%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B0%D1%8F)

Если функция f\colon U(x_0) \to \Rимеет конечную производную в точке x_0,то в окрестности U(x_0)её можно приблизить [линейной функцией](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F)

f_l(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).

Функция f_lназывается касательной к fв точке x_0.Число  ~f'(x_0) является угловым коэффициентом или [тангенсом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%81) [угла](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%B3%D0%BE%D0%BB) [наклона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D0%BA%D0%BB%D0%BE%D0%BD) касательной прямой.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=9)**] Скорость изменения функции**

Пусть s=s(t)— закон прямолинейного [движения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B2%D0%B8%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5). Тогда v(t_0)=s'(t_0)выражает [мгновенную скорость](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B3%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) движения в момент времени t_0.Вторая производная a(t_0) = s''(t_0)выражает [мгновенное ускорение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B3%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) в момент времени t_0.

Вообще производная функции y=f(x)в точке x_0выражает скорость изменения функции в точке x_0, то есть скорость протекания [процесса](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81%D1%81), описанного зависимостью y=f(x).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=10)**] Производные высших порядков**

Понятие производной произвольного порядка задаётся [рекуррентно](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%D0%B8%D1%8F). Полагаем

f^{(0)}(x_0) \equiv f(x_0).

Если функция fдифференцируема в x_0, то производная первого порядка определяется соотношением

f^{(1)}(x_0) \equiv f'(x_0).

Пусть теперь производная n-го порядка f^{(n)}определена в некоторой окрестности точки x_0и дифференцируема. Тогда

f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0).

Если функция ~u = f(x, y, z)имеет в некоторой области D [частную производную](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) по одной из переменных, то названная производная, сама являясь функцией от ~x, y, z,может иметь в некоторой точке ~(x_0,y_0,z_0)частные производные по той же или по любой другой переменной. Для исходной функции ~u = f(x, y, z)эти производные будут частными производными второго порядка (или вторыми частными производными).

~u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0)или ~\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}

~u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)или ~\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y}

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется [смешанной частной производной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BC%D0%B5%D1%88%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F). Например,

~u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=11)**] Способы записи производных**

В зависимости от целей, области применения и используемого математического аппарата используют различные способы записи производных. Так, производная n-го порядка может быть записана в нотациях:

* [Лагранжа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6,_%D0%96%D0%BE%D0%B7%D0%B5%D1%84_%D0%9B%D1%83%D0%B8) f^{(n)}(x_0), при этом для малых n часто используют штрихи и римские цифры:

f^{(1)}(x_0) = f'(x_0) = f^I(x_0),

f^{(2)}(x_0) = f''(x_0) = f^{II}(x_0),

f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0) = f^{III}(x_0),

f^{(4)}(x_0) = f^{IV}(x_0),и т. д.

Такая запись удобна своей краткостью и широко распространена; однако штрихами разрешается обозначать не выше третьей производной.

* [Лейбница](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86,_%D0%93%D0%BE%D1%82%D1%84%D1%80%D0%B8%D0%B4_%D0%92%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC), удобная наглядной записью отношения бесконечно малых (только в случае, если x— независимая переменная; в противном случае обозначение верно лишь для производной первого порядка):

\frac{d^n\!f}{dx^n}(x_0)

* [Ньютона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD,_%D0%98%D1%81%D0%B0%D0%B0%D0%BA), которая часто используется в механике для производной по времени функции координаты (для пространственной производной чаще используют запись Лагранжа). Порядок производной обозначается числом точек над функцией, например:

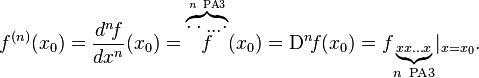
\dot{x}(t_0)— производная первого порядка xпо tпри t=t_0, или \ddot{f}(x_0)— вторая производная fпо xв точке x_0и т. д.

* [Эйлера](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B9%D0%BB%D0%B5%D1%80,_%D0%9B%D0%B5%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4), использующая [дифференциальный оператор](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80) (строго говоря, дифференциальное выражение, пока не введено соответствующее функциональное пространство), и потому удобная в вопросах, связанных с [функциональным анализом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7):

 \mathrm{D}^n\!f(x_0), или иногда  \partial^n\!f(x_0).

* В вариационном исчислении и математической физике часто применяется обозначение f_x, f_{xx}; для значения производной в точке — f_x\vert_{x=x_0}. Для частных производных обозначение то же, поэтому смысл обозначения определяют из контекста.

Конечно, при этом необходимо не забывать, что служат все они для обозначения одних и тех же объектов:



**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=12)**] Примеры**

* Пусть f(x) = x^2. Тогда

f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0}\frac{x^2 - x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0}\frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0}(x+x_0) = 2x_0.

* Пусть f(x) = |x|. Тогда если x_0 \neq 0,то

f '(x_0) = \sgn x_0,

где \sgnобозначает [функцию знака](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_sgn(x)). Если x_0 = 0,то f'_+(x_0) = 1,\; f'_-(x_0) = -1,а следовательно f'(x_0)не существует.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=13)**] Правила дифференцирования**

Операция нахождения производной называется дифференцированием. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

* C'=0
* x'=1
* \left(f+g\right)'=f '+g'[[2]](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#cite_note-2)
* \left(fg\right)'=f'g+fg'[[3]](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#cite_note-3)
* \left(Cf\right)'=Cf'
* \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f' g-fg'}{g^2}…(g ≠ 0)
* \left(\frac{C}{g}\right)'=-\frac{Cg'}{g^2}(g ≠ 0)
* Если функция задана параметрически:

\left\{\begin{matrix}x=x(t),\\y=y(t),\end{matrix}\; \; t\in\left[T_1; T_2 \right] \right., то y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot \frac{dt}{dx}=y'_t\cdot t'_x=\frac{y'_t}{x'_t}

*Основная статья:* [***Дифференцирование сложной функции***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8)

* \frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{df(g)}{dg}\cdot \frac{dg(x)}{dx}=f'_g g'_x
* Формулы производной произведения и отношения обобщаются на случай n-кратного дифференцирования ([формула Лейбница](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B0_(%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F))):

(f g)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}{C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}},где C_n^k— [биномиальные коэффициенты](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82).

**Следующие свойства производной служат дополнением к правилам дифференцирования:**

* если функция дифференцируема на интервале (a,b), то она непрерывна на интервале (a,b). Обратное, вообще говоря, неверно (например, функция y(x)=|x|на [-1,1]);
* если функция имеет локальный [максимум/минимум](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%BC%D1%83%D0%BC) при значении аргумента, равном x, то f'(x)=0(это так называемая [лемма Ферма](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%BC%D0%BC%D0%B0_%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0));
* производная данной функции единственна, но у разных функций могут быть одинаковые производные.
* (f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \left (g'(x) \ln f(x) + \frac {g(x)f'(x)} {f(x)}\right ) (\forall x \in D_f:   f(x)>0) 

Доказательство [[показать]](javascript:collapseDiv(0);)


y=f(x)^{g(x)}



\ln y = g(x) \ln f(x)


\frac {y'} {y} = g'(x) \ln f(x) + \frac {g(x) f'(x)} {f(x)}



y' = y \left (g'(x) \ln f(x) + \frac {g(x) f'(x)} {f(x)}\right )



y' = f(x)^{g(x)} (g'(x) \ln f(x) + \frac {g(x) f'(x)} {f(x)})
[■](http://ru.wikipedia.org/wiki/Q.E.D.)

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=14)**] Таблица производных некоторых функций**

*Основная статья:* [***Таблица производных***](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B0%D0%B1%D0%BB%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D1%8B%D1%85)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Функция ~f(x)** | **Производная ~f'(x)** | **Примечание** |
| ~x^\alpha | ~\alpha \cdot x^{\alpha-1} | Доказательство [[показать]](javascript:collapseDiv(1);)  Фиксируем x \in \mathbb{D}(f), придадим приращение аргументу ~\Delta x. Вычислим приращение функции: \Delta y=(x+\Delta x)^\alpha -x^\alpha=x^\alpha((1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha -1), т.о (x^\alpha)'= \lim_{\Delta x \to 0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x \to 0}{\frac{x^\alpha((1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha -1)}{\Delta x}}=[См.](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE_%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D0%B0%D1%8F_%D0%B8_%D0%B1%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE_%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B0%D1%8F#.D0.AD.D0.BA.D0.B2.D0.B8.D0.B2.D0.B0.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D1.82.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D0.B5.D0.BB.D0.B8.D1.87.D0.B8.D0.BD.D1.8B)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\alpha\cdot x^\alpha\cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\alpha \cdot x^{\alpha-1} |
| ~a^x | ~a^x\cdot\ln {a} | Доказательство [[показать]](javascript:collapseDiv(2);)  Фиксируем x \in \mathbb{D}(f), придадим приращение аргументу ~\Delta x. Вычислим приращение функции: ~\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1), т.о (a^x)'= \lim_{\Delta x \to 0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x \to 0}{\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}}=[См.](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE_%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D0%B0%D1%8F_%D0%B8_%D0%B1%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%BE_%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B0%D1%8F#.D0.AD.D0.BA.D0.B2.D0.B8.D0.B2.D0.B0.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D1.82.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D0.B5.D0.BB.D0.B8.D1.87.D0.B8.D0.BD.D1.8B)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^x\cdot\Delta x \cdot \ln {a }}{\Delta x}=a^x\cdot\ln {a} |
| ~\log_a {x} | ~\frac{1}{x\cdot \ln {a}} |  |
| ~\sin x | ~\cos x |  |
| ~\cos x | ~-\sin x |  |
| ~ \mathrm{tg}\ x | ~\frac{1}{\cos^2{x}} |  |
| ~ \mathrm{ctg}\ x | ~-\frac{1}{\sin^2{x}} |  |
| ~\arcsin{x} | \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |  |
| ~\arccos{x} | -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} |  |
| ~ \mathrm{arctg}\ x | ~\frac{1}{1+x^2} |  |
| ~ \mathrm{arcctg}\ x | ~-\frac{1}{1+x^2} |  |
| ~ \mathrm{sh}\ x | ~ \mathrm{ch}\ x |  |
| ~ \mathrm{ch}\ x | ~ \mathrm{sh}\ x |  |
| ~ \mathrm{th}\ x | ~\frac{1}{\mathrm{ch}^2\ x} |  |
| ~ \mathrm{cth}\ x | ~-\frac{1}{\mathrm{sh}^2\ x} |  |

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=15)**] Производная вектор-функции по параметру**

Определим производную [вектор-функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80-%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) \mathbf{r}(t)по параметру:

\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.

Если производная в точке ~tсуществует, вектор-функция называется дифференцируемой в этой точке. Координатными функциями для производной будут x'(t),\ y'(t),\ z'(t).

Свойства производной вектор-функции (всюду предполагается, что производные существуют):

* \frac{d}{dt} (\mathbf{r_1}(t)+\mathbf{r_2}(t))=\frac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}+\frac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}— производная суммы есть сумма производных.
* \frac{d}{dt} (f(t)\mathbf{r}(t))=\frac{df(t)}{dt}\mathbf{r}(t) + f(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}— здесь ~f(t)— дифференцируемая скалярная функция.
* \frac{d}{dt} (\mathbf{r_1}(t)\mathbf{r_2}(t))=\frac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}\mathbf{r_2}(t) + \mathbf{r_1}(t)\frac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}— дифференцирование [скалярного произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).
* \frac{d}{dt} [\mathbf{r_1}(t)\mathbf{r_2}(t)]=\left [\frac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}\mathbf{r_2}(t)\right ] + \left [\mathbf{r_1}(t) \frac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}\right]— дифференцирование [векторного произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).
* \frac{d}{dt} (\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t),\mathbf{c}(t))=\left (\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt},\mathbf{b}(t),\mathbf{c}(t)\right) + \left (\mathbf{a}(t),\frac{d\mathbf{b}(t)}{dt},\mathbf{c}(t)\right) + \left (\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \frac{d\mathbf{c}(t)}{dt}\right)— дифференцирование [смешанного произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BC%D0%B5%D1%88%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=17)**] Примечания**

1. [**↑**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#cite_ref-1) [Горный университет. Кафедра высшей математики](http://www.spmi.ru/ffgd/vm)
2. [**↑**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#cite_ref-2) Производная суммы равна сумме производных
3. [**↑**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%CF%F0%EE%E8%E7%E2%EE%E4%ED%E0%FF_%F4%F3%ED%EA%F6%E8%E8#cite_ref-3) Отсюда, в частности, следует, что производная произведения функции и константы равна произведению производной этой функции на константу

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8&action=edit&section=18)**] Литература**

* *В. Г. Болтянский,* [Что такое дифференцирование?](http://plm.mccme.ru/ann/a17.htm), [«Популярные лекции по математике»](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BF%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8_%D0%BF%D0%BE_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B5), Выпуск 17, Гостехиздат 1955 г., 64 стр.
* *В. А. Гусев*, *А. Г. Мордкович* «Математика»
* *Г. М. Фихтенгольц* «Курс дифференциального и интегрального исчисления», том 1
* *В. М. Бородихин*, [Высшая математика](http://ciu.nstu.ru/kaf/vm/a/file_get/123265?nomenu=1), учеб. пособие, [ISBN 5-7782-0422-1](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:%D0%98%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8_%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3/5778204221)

Источник — «<http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Производная_функции&oldid=52985242>» КатегорияДифференциальное исчисление

**Производная (обобщения)**

[[править](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%28%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%29&action=edit&section=0)]

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Перейти к: [навигация](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#mw-head), [поиск](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#p-search)

*У этого термина существуют и другие значения, см.* [*Производная*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F)*.*

В [математике](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) существует много различных обобщений понятия [**производной**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8), так как она является базовой конструкцией [дифференциального исчисления](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

|  |
| --- |
| **Содержание**  [[убрать](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F))]   * [1 Односторонние производные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.9E.D0.B4.D0.BD.D0.BE.D1.81.D1.82.D0.BE.D1.80.D0.BE.D0.BD.D0.BD.D0.B8.D0.B5_.D0.BF.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D0.B5) * [2 Анализ функций нескольких переменных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.90.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D0.B8.D0.B7_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B9_.D0.BD.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.BE.D0.BB.D1.8C.D0.BA.D0.B8.D1.85_.D0.BF.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D1.85) * [3 Производные высшего и дробного порядка](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.9F.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D1.8B.D1.81.D1.88.D0.B5.D0.B3.D0.BE_.D0.B8_.D0.B4.D1.80.D0.BE.D0.B1.D0.BD.D0.BE.D0.B3.D0.BE_.D0.BF.D0.BE.D1.80.D1.8F.D0.B4.D0.BA.D0.B0)   + [3.1 Производные высшего порядка в анализе функций нескольких переменных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.9F.D1.80.D0.BE.D0.B8.D0.B7.D0.B2.D0.BE.D0.B4.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.B2.D1.8B.D1.81.D1.88.D0.B5.D0.B3.D0.BE_.D0.BF.D0.BE.D1.80.D1.8F.D0.B4.D0.BA.D0.B0_.D0.B2_.D0.B0.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D0.B8.D0.B7.D0.B5_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B9_.D0.BD.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.BE.D0.BB.D1.8C.D0.BA.D0.B8.D1.85_.D0.BF.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D1.85) * [4 Алгебра](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.90.D0.BB.D0.B3.D0.B5.D0.B1.D1.80.D0.B0) * [5 Дифференциальная топология](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.94.D0.B8.D1.84.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BD.D1.86.D0.B8.D0.B0.D0.BB.D1.8C.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D1.82.D0.BE.D0.BF.D0.BE.D0.BB.D0.BE.D0.B3.D0.B8.D1.8F) * [6 Дифференциальная геометрия](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.94.D0.B8.D1.84.D1.84.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BD.D1.86.D0.B8.D0.B0.D0.BB.D1.8C.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D0.B3.D0.B5.D0.BE.D0.BC.D0.B5.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.8F) * [7 Анализ функций комплексного переменного](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.90.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D0.B8.D0.B7_.D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.B9_.D0.BA.D0.BE.D0.BC.D0.BF.D0.BB.D0.B5.D0.BA.D1.81.D0.BD.D0.BE.D0.B3.D0.BE_.D0.BF.D0.B5.D1.80.D0.B5.D0.BC.D0.B5.D0.BD.D0.BD.D0.BE.D0.B3.D0.BE) * [8 Функциональный анализ](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.A4.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D0.BE.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D1.8C.D0.BD.D1.8B.D0.B9_.D0.B0.D0.BD.D0.B0.D0.BB.D0.B8.D0.B7) * [9 Алгебраическая геометрия](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.90.D0.BB.D0.B3.D0.B5.D0.B1.D1.80.D0.B0.D0.B8.D1.87.D0.B5.D1.81.D0.BA.D0.B0.D1.8F_.D0.B3.D0.B5.D0.BE.D0.BC.D0.B5.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.8F) * [10 Квантовые группы](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.9A.D0.B2.D0.B0.D0.BD.D1.82.D0.BE.D0.B2.D1.8B.D0.B5_.D0.B3.D1.80.D1.83.D0.BF.D0.BF.D1.8B) * [11 Другие обобщения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.94.D1.80.D1.83.D0.B3.D0.B8.D0.B5_.D0.BE.D0.B1.D0.BE.D0.B1.D1.89.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F) * [12 Нуждающиеся в определении](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.9D.D1.83.D0.B6.D0.B4.D0.B0.D1.8E.D1.89.D0.B8.D0.B5.D1.81.D1.8F_.D0.B2_.D0.BE.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D0.B8) * [13 См. также](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)#.D0.A1.D0.BC._.D1.82.D0.B0.D0.BA.D0.B6.D0.B5) |

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=1)**] Односторонние производные**

[Правосторонний предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB)

\lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}

называется **правосторо́нней произво́дной** или **произво́дной спра́ва** и обозначается символами

f^+(x_0),\ f'_+(x_0),\ \mathrm{D}^+\!f(x_0).

Аналогично, [левосторонний предел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB)

\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}

называется **левосторо́нней произво́дной** или **произво́дной сле́ва** и обозначается символами

f^-(x_0),\ f'_-(x_0),\ \mathrm{D}^-\!f(x_0).

Пусть дана функция f\colon U(x_0) \to \R.Тогда существует конечная производная f'(x_0)тогда и только тогда, когда существуют конечные и равные односторонние производные f'_+(x_0) = f'_-(x_0), так как по свойству пределов функции, согласно которому для существования предела необходимо, чтобы оба его односторонних предела существовали и были равны, имеем: если \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, то существует \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},что является производной функции в точке  x_0, при этом f^'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0) .

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=2)**] Анализ функций нескольких переменных**

Одна из простейших ситуаций, в которых возможно обобщение — это вектор-функции нескольких переменных (наиболее часто область определения представляет собой векторное пространство). Это является предметом изучения [анализа функций нескольких переменных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%85_%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85).

[**Частная производная**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) определяется практически идентично производной одиночной вещественной функции, за исключением того, что она распознаёт выбор независимой переменной, который был сделан.

[**Полная производная**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) функции используется для индикации того, что функция может иметь и явную и неявную зависимость от переменной. Полная производная должна принимать во внимание оба возможных источника изменения, тогда как частная производная должна видеть только явную зависимость.

[**Производная Лагранжа**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%D0%B0) принимает во внимание изменения вследствие зависимости от времени и движения через пространство по векторному полю.

Для вещественнозначных функций из \R^nв \R, [**градиент**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82) производит вектор, каждый компонент которого является частной производной. Это может быть использовано для вычисления [**производных направлений**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F) [скалярных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80) функций или направлений нормалей.

Для векторнозначных функций \R^nв \R^n, [дивергенция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F) (расходимость) даёт меру того, как силён «источник» или «сток» в этой точке. Она может быть использована для вычисления потока при помощи [теоремы о дивергенции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BE_%D0%B4%D0%B8%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B8).

Для векторнозначных функций \R^3в \R^3, [**ротор**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) измеряет «вращение» векторного поля в этой точке.

Для любой функции из \R^nв \R^m, [**матрица Якоби**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%B8) — это матрица, содержащая все частные производные всех компонент функции. Без неё невозможно совершить преобразование координат. Её [определитель](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C) (также называемые **якобианом**) появляется как множитель при [замене переменных](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%97%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B0_%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85&action=edit&redlink=1) в формуле [интегрирования](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=3)**] Производные высшего и дробного порядка**

Другое простое обобщение, которое можно произвести, — это применить её больше, чем один раз, получая в результате производную второго (и выше) порядка, как определено в [статье о производных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8). Этот способ может быть обобщён.

В добавок к производным n-ого порядка для любого [натурального числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) n, используя различные методы, возможно ввести производные в дробных степенях, получая при этом так называемые [производные дробного порядка](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F). Производные отрицательных порядков будут соответствовать интегрированию, откуда появляется термин [дифферинтеграл](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB). Изучение различных возможных определений и записей производных ненатуральных порядков известно под названием [**дробное исчисление**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=4)**] Производные высшего порядка в анализе функций нескольких переменных**

Существует несколько различных векторнозначимых и скалярнозначимых производных второго порядка в анализе функций нескольких переменных.

[**Лапласиан**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%B0%D0%BD) — это [дивергенция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F) (расходимость) [градиента](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82) [скалярной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80) функции на \R^n. [**Д’Аламбертиан**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%94%E2%80%99%D0%90%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D0%B1%D0%B5%D1%80%D0%B0) — определяется аналогично лапласиану, но используя неопределённую [метрику](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B0) [пространства Минковского](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE_%D0%9C%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE), вместо [скалярного произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) в [евклидовом пространстве](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) \R^n.

[**Матрица Гессе**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%B0%D0%BD_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8#.D0.9C.D0.B0.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.86.D0.B0_.D0.93.D0.B5.D1.81.D1.81.D0.B5) — это матрица частных производных второго порядка скалярной функции, используемая для вычислений в [теории Морса](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%9C%D0%BE%D1%80%D1%81%D0%B0).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=5)**] Алгебра**

[**Производная**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%B0%D0%B1%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)&action=edit&redlink=1) в абстрактной алгебре — это линейное отображение на [кольце](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%86%D0%BE_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) или [алгебре](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0_%D0%BD%D0%B0%D0%B4_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%BC), которое удовлетворяет закону Лейбница ([правилу произведения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)). Они изучаются в чистой алгебраической постановке в [дифференциальной теории Галуа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%93%D0%B0%D0%BB%D1%83%D0%B0), но также появляются во многих других областях, где они часто употребляются с менее строгими алгебраическими определениями производных.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=6)**] Дифференциальная топология**

В [дифференциальной топологии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F), [**векторное поле**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%B5) может быть определено как дифференцирование на кольце [гладких функций](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) на [многообразии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5), а [касательный вектор](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%81%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80) может быть определён как производная в точке. Это позволяет абстрагироваться от записи направленной производной скалярной функции и перейти к общим многообразиям. Для многообразий, которые являются [подмножествами](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) \R^n, этот касательный вектор будет аналогичен направленной производной определённой выше.

[**Пушфорвард**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%83%D1%88%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B4&action=edit&redlink=1) отображения между многообразиями — это порождённое отображение между касательными пространствами этих отображений. Оно является абстракцией [якобиана](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%B8).

На [внешней алгебре](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%BD%D0%B5%D1%88%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0) [дифференциальных форм](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0) над [гладким многообразием](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5), [**внешняя производная**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0#.D0.A1.D0.B2.D1.8F.D0.B7.D0.B0.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.BE.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F) это уникальное линейное отображение, которое удовлетворяет порядковой версии закона Лейбница и при возведении в квадрат равно нулю. Это производная 1 порядка на внешней алгебре.

[**Производная Ли**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9B%D0%B8) — это скорость изменения одного векторного поля в направлении другого векторного поля. Это пример применения [скобки Ли](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%BA%D0%B0_%D0%9B%D0%B8) (векторные поля образуют [алгебру Ли](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0_%D0%9B%D0%B8) на [группе диффеоморфизмов](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%93%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%BC%D0%BE%D0%B2&action=edit&redlink=1) многообразия). Это производная 0 порядка на алгебре.

[**Внутренняя производная**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0#.D0.A1.D0.B2.D1.8F.D0.B7.D0.B0.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.BE.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F) — это производная «-1» порядка на внешней алгебре форм. Вместе, внешняя производная, производная Ли, и внутренняя производная образуют [супералгебру Ли](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D1%83%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0_%D0%9B%D0%B8&action=edit&redlink=1).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=7)**] Дифференциальная геометрия**

В [дифференциальной геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) (и вытекающем из неё [тензорном анализе](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BD%D0%B7%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7)), с помощью [**ковариантной производной**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) берутся производные по направлениям векторных полей вдоль [кривых](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D1%8F) или вообще в криволинейной системе координат. Это расширяет производную по направлению скалярных функций до сечений [векторных расслоений](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) или [главных расслоений](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BB%D0%BE%D1%91%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE&action=edit&redlink=1). В [римановой геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) существование метрики позволяет сделать канонический выбор свободной от [кручения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%80%D1%8C_%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%B2_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B8_%D0%B3%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF) ковариантной производной, известной как [связность Леви-Чивита](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B2%D1%8F%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%9B%D0%B5%D0%B2%D0%B8-%D0%A7%D0%B8%D0%B2%D0%B8%D1%82%D0%B0).

[**Внешняя ковариантная производная**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%92%D0%BD%D0%B5%D1%88%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F&action=edit&redlink=1) расширяет внешнюю производную на векторно-значимые формы.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=8)**] Анализ функций комплексного переменного**

В [комплексном анализе](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7), центральными объектами изучения являются [голоморфные функции](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F), которые являются комплекснозначными функциями на плоскости [комплексных чисел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) и удовлетворяющие соответственно расширенному определению дифференцируемости.

[**Производная Шварца**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%A8%D0%B2%D0%B0%D1%80%D1%86%D0%B0) описывает, как комплексная функция аппроксимируется [кусочно-линейным отображением](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D1%83%D1%81%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%BE-%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5&action=edit&redlink=1), преимущественно тем же самым способом, каким обычная производная описывает, как функция аппроксимируется линейным отображением.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=9)**] Функциональный анализ**

В [функциональном анализе](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7) [**производная Гато**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%93%D0%B0%D1%82%D0%BE) расширяет концепцию [производной по направлению](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8E) на локально выпуклые [топологические векторные пространства](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE). [**Производная Фреше**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%A4%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B5) позволяет расширить понятие производной на произвольное [банахово пространство](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE).

В [теории меры](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BC%D0%B5%D1%80%D1%8B) [**производная Радона — Никодима**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%BD%D0%B0_%E2%80%94_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%B0) обобщает [якобиан](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D0%B0%D0%BD), использовавшийся для изменяющихся переменных, на меры. Она выражает одну меру \muв терминах другой меры \nu(при некоторых условиях).

Производная также допускает обобщение на пространстве [**обобщенных функций**](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F), используя [интегрирование по частям](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE_%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8F%D0%BC) в соответствующем хорошо устроенном подпространстве.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=10)**] Алгебраическая геометрия**

В [алгебраической геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) [**кэлеров дифференциал**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D1%8D%D0%BB%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%B2_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB&action=edit&redlink=1) позволяет расширирить определение внешней производной на произвольные [алгебраические многообразия](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5), вместо просто [гладких](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5) [многообразий](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=11)**] Квантовые группы**

В области [квантовых групп](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%B3%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0) [**[q](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Q-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F&action=edit&redlink=1)-производная**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Q-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F&action=edit&redlink=1) — это [[q](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Q-%D0%B4%D0%B5%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F&action=edit&redlink=1)-деформация](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Q-%D0%B4%D0%B5%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F&action=edit&redlink=1) обычной производной функции.

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=12)**] Другие обобщения**

Вполне можно скомбинировать два или больше различных понятий расширения или абстракции простой производной. Например, в [геометрии Финслера](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%A4%D0%B8%D0%BD%D1%81%D0%BB%D0%B5%D1%80%D0%B0) изучаются пространства, которые [локально](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9B%D0%BE%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE&action=edit&redlink=1) выглядят как [банаховы пространства](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D1%85%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE). Таким образом можно создать производную с некоторыми особенностями [функциональной производной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F) и [ковариантной производной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F).

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=13)**] Нуждающиеся в определении**

* [Производная Дини](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%94%D0%B8%D0%BD%D0%B8&action=edit&redlink=1)
* [Производная Гато](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%93%D0%B0%D1%82%D0%BE)
* [Матричное исчисление](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B8%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5&action=edit&redlink=1)
* [Производная Пинкерля](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9F%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%B5%D1%80%D0%BB%D1%8F&action=edit&redlink=1)
* [Параметрическая производная](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F&action=edit&redlink=1)
* [Полу-дифференцируемость](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D1%83-%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D1%83%D0%B5%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C&action=edit&redlink=1)

**[**[**править**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_(%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B1%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)&action=edit&section=14)**] См. также**

* [Дифференциал](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB)
* [Односторонняя производная](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F)
* [Производная Пеано](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%9F%D0%B5%D0%B0%D0%BD%D0%BE)
* [Производная Радона — Никодима](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%BD%D0%B0_%E2%80%94_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%B0)
* [Производная по направлению](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8E)
* [Контингенция и паратингенция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5#.D0.A1.D0.B2.D1.8F.D0.B7.D0.B0.D0.BD.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.BF.D0.BE.D0.BD.D1.8F.D1.82.D0.B8.D1.8F)
* Исполнитель:
* Студентка группы М-33 Грабовец А.Ю.
* Научный руководитель:
* Канд. физ-мат. наук, доцент Лебедева М.Т.
* Гомель 2007
* **Содержание**
* Введение
* 1. Различные подходы к трактовке понятия функции в курсе математики в средней школе
* 2. Основные направления введения понятия функции в школьном курсе математики
* 3. Методика формирования понятий общих свойств функций
* 4. Методическая схема изучения функций. Изучение функций в классе функций
* Заключение
* Литература