***Грамотность. Комбинаторика***

|  |  |
| --- | --- |
| ***Задача 1a*** | ***Задача 1b*** |
| При окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек перешло из рук в руки, если во встрече участвовали 6 специалистов? | При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько всего было рукопожатий, если встретились 6 друзей? |
| **Ответ:** 30 | **Ответ:** 15 |
| **Решение.**  Каждый из 6-ти специалистов отдал по 5 карточек (всем, кроме себя). Потребовалось  6·5 = 30 карточек. | **Решение.**  В одном рукопожатии равноправно участвуют два человека. 6 друзей объединялись в группы по 2 без учёта порядка следования. Такие группировки (выборки) называются сочетаниями. Число сочетаний определяем по формуле  С62 = 6!/2!/(6 - 2)! = 6!/2!/4! = 5·6/2 = 15.  [о вычислениях подробнее](http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination_problems.html#note1) |
| ***Задача 2a*** | ***Задача 2b*** |
| В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать? | В спортивной команде 9 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать? |
| **Ответ:** 36 | **Ответ:** 72 |
| **Решение.**  Два солиста равноправны. (Может быть, и петь планируют дуэтом.) Нас не волнует порядок следования в группе из 2-ух человек, выбранных из 9-ти. Значит определяем число сочетаний из 9 по 2.  С92 = 9!**/**2!/(9 - 2)! = 9!/2!/7! = 8·9/2 = 36. | **Решение.**  Казалось бы, мы снова выбираем 2-ух человек из 9-ти, но теперь между ними качественная разница. Они будут выполнять разные обязанности в команде. Мы выбираем капитана И заместителя независимо друг от друга. Поэтому применим правило умножения вариантов (И-правило). Из 9-ти человек капитана можно выбрать 9-тью способами. Его заместителя из оставшихся 8-ми человек - 8-мью способами. Общее число вариантов: 9·8 = 72. (Заметьте, что если сначала выбрать заместителя из 9 человек, а потом капитана из оставшихся 8-ми, результат будет тот же.)  Можно рассуждать иначе. Есть два места для капитана и его заместителя, нужно разместить на них 2-ух человек, выбрав их из 9-ти. Такие группировки (выборки) называются размещениями. Число размещений определяем по формуле  А92 = 9!**/**(9 - 2)! = 9!/7! = 8·9 = 72. [о формуле подробнее](http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination_problems.html#note2) |
| ***Задача 3a*** | ***Задача 3b*** |
| Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях? | В понедельник в пятом классе 5 уроков: музыка, математика, русский язык, литература и история. Сколько различных способов составления расписания на понедельник существует? |
| **Ответ:** 720 | **Ответ:** 120 |
| **Решение.**  Легко понять, что в этой задаче речь идет о перестановках. 6 гостей занимают все 6 стульев и могут только меняться местами. Число перестановок из 6 определяем по формуле  P6 = 6! = 1·2·3·4·5·6 = 720. | **Решение.**  Может быть, не так очевидно, но это тоже перестановки. С точки зрения математики, вообще та же самая задача. Представьте себе, что расписание составляете вы. Чертите таблицу с пятью строками для пяти уроков ("готовите стулья") и вписываете в каждую строку название одного из 5-ти предметов ("рассаживаете гостей"). Число перестановок из 5 определяем по формуле  P5 = 5! = 1·2·3·4·5 = 120. |
| ***Задача 4a*** | ***Задача 4b*** |
| Пятеро друзей сыграли между собой по одной партии в шахматы. Сколько всего партий было сыграно? | Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали? |
| **Ответ:** 10 | **Ответ:** 720 |
| **Решение.**  В шахматной партии 2 равноправных участника (точно также, как в задаче о рукопожатиях). Значит из 5-ти человек формируем группы по 2 без учета порядка следования - сочетания. Определяем число сочетаний из 5 по 2.  С52 = 5!/2!/(5 - 2)! = 5!/2!/3! = 4·5/2 = 10. | **Решение.**  На пьедестале почёта находятся 3 команды из 10, и для них очень существенно, кто какое место занял, т.е. порядок следования. Составление групп с учетом порядка следования - размещения. Число размещений определяем по формуле  А103 = 10!**/**(10 - 3)! = 10!/7! = 8·9·10 = 720. Другой способ решения с использованием И-правила, как в задаче 2б. Однако, чем больше выборка, тем удобнее сразу применять готовую формулу. |
| ***Задача 5a*** | ***Задача 5b*** |
| В меню столовой предложено на выбор 2 первых блюда, 6 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из первого, второго и третьего блюда, можно составить? | Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салаты из трёх видов овощей. Сколько различных вариантов салатов можно приготовить? |
| **Ответ:** 48 | **Ответ:** 20 |
| **Решение.**  Выбираем три блюда: первое, И второе, И третье. Едим каждое блюдо отдельно (независимо друг от друга). Следовательно, можем применить правило умножения вариантов (И-правило). Из 2-ух первых блюд одно можно выбрать 2-мя способами, из 6-ти вторых одно можно выбрать 6-тью способами, из 4-ёх третьих одно - 4-мя способами. 2·6·4 = 48. | **Решение.**  Чем отличается салат от описанного ранее обеда? Обед едим последовательно, а салат перемешиваем. Выбранные овощи в салате равноправны, очередность их попадания в общее блюдо не важна. Значит наши выборки это сочетания из 6 по 3.  С63 = 6!/3!/(6 - 3)! = 6!/3!/3! = (4·5·6)/(1·2·3) = 20. |
| ***Задача 6a*** | ***Задача 6b*** |
| В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки? | В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими способами можно выбрать покупку из двух разных блокнотов и одной ручки? |
| **Ответ:** 28 | **Ответ:** 84 |
| **Решение.**  Выбираем одну ручку И один блокнот. Одну ручку из 4-ёх 4-мя способами, один блокнот из 7-ми - 7-ю способами. Применяем правило умножения  4·7 = 28. | **Решение.**  Выбираем одну ручку И два блокнота. Снова можем применить правило умножения вариантов. Одну ручку из 4-ёх можем выбрать 4-мя способами, два блокнота из 7-ми - ***?*** способами.  Чтобы определить сколько способов выбора 2-ух блокнов из 7-ми, воспользуемся формулой для числа сочетаний, т.к. для нас несущественно в каком порядке это было сделано.  С72 = 7!/2!/(7 - 2)! = 7!/2!/5! = 6·7/2 = 21.  Теперь применяем правило умножения  4·21 = 84. |
| ***Задача 7a*** | ***Задача 7b*** |
| На прививку в медпункт отправились 7 друзей. Сколькими разными способами они могут встать в очередь у медицинского кабинета? | Секретный замок состоит из 4 барабанов, на каждом из которых можно выбрать цифры от 0 до 9. Сколько различных вариантов выбора шифра существует? |
| **Ответ:** 5040 | **Ответ:** 10000 |
| **Решение.**  Число способов встать в очередь равно числу перестановок 7-ми друзей в пределах этой очереди.  P7 = 7! = 1·2·3·4·5·6·7 = 5040.   Задача такая же, как о гостях и стульях, но обратите внимание, насколько быстро растет число вариантов при увеличении числа переставляемых предметов. | **Решение.**  На каждом барабане можно выбрать 1-ну цифру из 10-ти 10-тью способами и независимо от других, поэтому применяем правило умножения: 10·10·10·10 = 10000.  Можно также считать, что нужно разместить 10 цифр на 4-ёх местах с повторениями. В комбинаторике существует раздел "Выборки с повторениями" ([см. подробнее](http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination_problems.html#note3)). В данном случае нам нужна формула для размещений. Число размещений с повторениями определяется как ***nk***, где *n* - количество элементов для выбора (здесь *n* = 10 цифр), *k* - объём выборки или количество возможных повторов одного элемента (здесь *k* = 4, одна и та же цифра может быть установлена на всех четырех барабанах). Таким образом, искомое число вариантов  104 = 10000. |
| ***Задача 8a*** | ***Задача 8b*** |
| Сколько различных трёхзначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются). | Сколько различных трёхзначных чисел можно составить с помощью цифр 1, 3, 7? (Цифры могут повторяться). |
| **Ответ:** 6 | **Ответ:** 27 |
| **Решение.**  Трёхзначное число состоит из 3-ёх цифр, которые нам даны. Поскольку цифры не могут повторяться, то получать различные числа можно только путем их перестановки. Число перестановок из 3-ёх определяем по формуле  P3 = 3! = 1·2·3 = 6. | **Решение.**  Если цифры могут повторяться, то по разрядам их можно размещать независимо от друг от друга. Значит можем применить правило умножения вариантов (И-правило). Одну цифру из трёх для разряда сотен можно выбрять 3-мя способами, И одну цифру из тех же трёх для разряда десятков - 3-мя способами, И одну из трёх для разряда единиц - 3-мя способами. Общее число вариантов 3·3·3 = 27. |
| ***Задача 9a*** | ***Задача 9b*** |
| Сколько различных трёхзначных чисел можно составить с помощью цифр 7 и 3? | Сколько различных двузначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются). |
| **Ответ:** 8 | **Ответ:** 6 |
| **Решение.**  Трёхзначное число из двух цифр неизбежно будет содержать повторения, поэтому можно воспользоваться формулой для числа размещений с повторениями, как в задаче 7b. Здесь количество элементов для выбора n = 2 цифры, количество возможных повторов одного элемента k = 3 раза, цифра в трёхзначном числе может повториться трижды, например, 777. Таким образом, искомое число вариантов  23 = 8.  Но можно и проще, так как эта задача полностью аналогична задаче 8b. Также используем И-правило, выбирая одну из 2-ух цифр независимо для каждой из трёх позиций,  2·2·2 = 8.  В свою очередь, в задаче 8b можно было воспользоваться формулой для числа размещений с повторениями: 33 = 27. Дело в том, что формула как раз выводится с применением И-правила и теми же рассуждениями, какие описаны в решении этих задач. | **Решение.**  Классический случай размещений: выбираем из 3-ёх элементов без повторов и размещаем на 2-ух позициях - в разряд десятков и в разряд единиц. Число размещений определяем по формуле  А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. |
| ***Задача 10a*** | ***Задача 10b*** |
| Сколько нечетных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 8, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться). | Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 7, 6, 5, 0, если цифры в записи числа не могут повторяться? |
| **Ответ:** 6 | **Ответ:** 18 |
| **Решение.**  Искомое число должно оканчиваться цифрой 3, так как 4, 6 и 8 делятся на 2 без остатка. Поэтому позиция единиц у нас уже занята, и остается разместить 3 цифры на 2-ух позициях - десятков и сотен. Число размещений из 3 по 2 определяем по формуле  А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. | **Решение.**  Сначала определим, сколько всего можно составить групп из 4-ёх заданных цифр по 3 с учётом порядка следования и без повторений.  А43 = 4!**/**(4 - 3)! = 4!/1! = 1·2·3·4/1 = 24. Но не все эти группы будут трёхзначными числами. Те из них, которые начинаются с цифры 0, по существу, - двузначные числа. Сколько таких групп? Если на первом месте стоит 0, то на позициях десятков и единиц располагаются 2 цифры из оставшихся 3-ёх. Определяем число размещений из 3 по 2 А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. Вычитая из общего числа вариантов лишние, получим  24 - 6 = 18. |
| ***Задача 11a*** | ***Задача 11b*** |
| Сколько четных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться). | Сколько четных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6? (Цифры в записи числа могут повторяться). |
| **Ответ:** 12 | **Ответ:** 32 |
| **Решение.**  Четными будут числа, оканчивающиеся на 4 ИЛИ на 6. Поэтому подсчитаем количество вариантов, заканчивающихся на одну из этих цифр, а затем воспользуемся правилом сложения (ИЛИ-правилом), чтобы определить общее число вариантов. Если число оканчивается 4-кой, то на позициях сотен и десятков могут находиться любые 2 цифры из оставшихся 3-ёх. Число размещений из 3 по 2 А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. Также получается, если число оканчивается 6-кой: А32 = 6. Общее число вариантов 6 + 6 = 12. | **Решение.**  Так же, как в предыдущем случае рассмотрим отдельно числа, заканчивающиеся 4-кой и 6-кой, а затем воспользуемся правилом сложения вариантов. Пусть позиция единиц у нас занята цифрой 4. В этот раз в позиции десятков может стоять любая из четырёх заданных цифр (4 варианта) И в позиции сотен любая из этих же 4-ёх цифр (4 варианта), всего 4·4 = 16.  Если число оканчивается на 6, теми же рассуждениями получаем еще 16 вариантов.  Всего 16 + 16 = 32. |
| ***Задача 12a*** |  |
| Сколько различных дробей можно составить с использованием цифр 2, 3, 4? (В числителе и знаменателе не может быть одна и та же цифра.) |  |
| **Ответ:** 18 |  |
| **Решение.**  Заметим, что не только в числителе и знаменателе не может быть одна и та же цифра, но цифры вообще не могут повторяться, иначе задача не имела бы смысла. В число дробей входили бы, например, 2/3, 2/33, 2/333, 2/3333 и т.п. Таких вариантов бесконечное число.  Далее заметим, что текст "с использованием цифр" может быть понят неоднозначно: с использованием всех трёх или с выбором из них. Здесь рассмотрим более общий случай - с выбором. Выборка не может состоять меньше, чем из двух цифр, чтобы хватило и на числитель, и на знаменатель. Дроби бывают правильные, в которых знаменатель больше числителя, например, 4/23, и неправильные, в которых числитель больше знаменателя, например, 23/4. Таким образом, возможны такие виды дробей \*/\* ИЛИ \*\*/\* ИЛИ \*/\*\*, где звёздочкой обозначено место для одной из заданных цифр. Подсчитаем число вариантов для каждого вида дроби отдельно, а затем сложим результаты в соответствии с ИЛИ-правилом. Случай \*/\* определяется числом размещений из 3 по 2, так как используем не все заданные цифры и важен порядок следования (например, сравните 4/3 и 3/4). А32 = 3!**/**(3 - 2)! = 3!/1! = 2·3 = 6. Случай \*/\*\* определяется числом перестановок из 3, так как для такой дроби нужно использовать все заданные цифры. Дроби будут различаться только расположением цифр по позициям.  P3 = 3! = 1·2·3 = 6. Случай \*\*/\* аналогичен предыдущему, также определяется числом перестановок из 3. P3 = 6.  Общее число вариантов 6 + 6 + 6 = 18.  Если вы получили ответ 12, а не 18, обязательно разберитесь почему. Это иначе понятое условие задачи? Забыты неправильные дроби? Ошибка в комбинаторике? |  |