

Областной этап
Республиканской олимпиады школьников по математике
2017-2018 учебный год

9 класс

1 тур

Уважаемые участники! На олимпиаде запрещается пользоваться сотовыми телефонами, калькуляторами и прочими электронными приборами. Запрещено списывать. Запрещается выходить из аудитории во время олимпиады.

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Вычислить сумму

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{2018}{2016! + 2017! + 2018!}$$

2. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c , сумма квадратов которых равна 3, выполняется неравенство

$$5(a^4 + b^4 + c^4) + 9 \geq 8(a^3 + b^3 + c^3).$$

3. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон AB , BC , AC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Точка A' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1 . Точка B' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и CC_1 . Точка C' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и BB_1 . Точки A' , B' , C' лежат внутри треугольника ABC . Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.

Областной этап
Республиканской олимпиады школьников по математике
2017-2018 учебный год

10 класс

1 тур

Уважаемые участники! На олимпиаде запрещается пользоваться сотовыми телефонами, калькуляторами и прочими электронными приборами. Запрещено списывать. Запрещается выходить из аудитории во время олимпиады.

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c , сумма квадратов которых равна 3, выполняется неравенство

$$5(a^4 + b^4 + c^4) + 9 \geq 8(a^3 + b^3 + c^3).$$

2. Найти все пары натуральных чисел (x, y) таких, что $2^x + 3^y$ является точным квадратом.
3. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон AB , BC , AC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Точка A' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1 . Точка B' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и CC_1 . Точка C' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и BB_1 . Точки A' , B' , C' лежат внутри треугольника ABC . Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.

Областной этап
Республиканской олимпиады школьников по математике
2017-2018 учебный год

11 класс

1 тур

Уважаемые участники! На олимпиаде запрещается пользоваться сотовыми телефонами, калькуляторами и прочими электронными приборами. Запрещено списывать. Запрещается выходить из аудитории во время олимпиады.

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Найти все пары натуральных чисел (x, y) таких, что $2^x + 3^y$ является точным квадратом.
2. Точка P лежит внутри треугольника ABC . Прямые AP , BP и CP пересекают прямые BC , CA и AB соответственно в точках D , E и F . Докажите, что если два из шести четырёхугольников $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$, $AEPF$, $BFPD$ и $CDPE$ таковы, что около них можно описать окружность, то окружность можно описать около каждого из этих шести четырёхугольников.
3. Пусть $N = m^{2018} + 1$ ($m \in \mathbb{N}$, $m > 2018$). На доске в указанном порядке в ряд выписаны числа $N, N - m, N - 2m, \dots, m + 1, 1$. За один шаг с доски стирается самое левое из оставшихся чисел вместе со своими делителями (если такие есть). Эту операцию проделали несколько раз, пока на доске не осталось ни одного числа. Какое число стёрли последним?