Областной этап
Республиканской олимпиады школьников по математике
2017-2018 учебный год

9 класс

2 тур

Уважаемые участники! На олимпиаде запрещается пользоваться сотовыми телефонами, калькуляторами и прочими электронными приборами. Запрещено списывать. Запрещается выходить из аудитории во время олимпиады.

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$
$$f\big(m-n+f(n)\big) = f(m)+f(n).$$

5. Несколько аэропортов связаны двусторонними беспересадочными авиарейсами так, что из каждого аэропорта выходит не более 2018 рейсов. Докажите, что можно разделить все рейсы между 11 авиакомпаниями компаниями так, что рейсами любой из компаний нельзя совершить круговое путешествие по нечетному числу аэропортов.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Прямая AB разбивается на отрезок AB и лучи a и b с началами A и B соответственно. Луч r симметричен a относительно биссектрисы угла CAD; луч s симметричен b относительно биссектрисы угла CBD. Оказалось, что точки O и C лежат по одну сторону от прямой AB, а точка P пересечения лучей r и s — по другую. Докажите, что OP и CD перпендикулярны.

Областной этап
Республиканской олимпиады школьников по математике
2017-2018 учебный год

10 класс

2 тур

Уважаемые участники! На олимпиаде запрещается пользоваться сотовыми телефонами, калькуляторами и прочими электронными приборами. Запрещено списывать. Запрещается выходить из аудитории во время олимпиады.

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов

4. Несколько аэропортов связаны двусторонними беспересадочными авиарейсами так, что из каждого аэропорта выходит не более 2018 рейсов. Докажите, что можно разделить все рейсы между 11 авиакомпаниями компаниями так, что рейсами любой из компаний нельзя совершить круговое путешествие по нечетному числу аэропортов.

5. Найти все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x,y\in\mathbb{R}$ условию $f\big(xf(x)+f(y)\big)=x^2+y$.

6. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 выбраны соответственно на отрезках AO, BO, CO и DO так, что $AA_1=CC_1$, $BB_1=DD_1$. Пусть описанные окружности треугольников AOB и COD второй раз пересекаются в точке M, описанные окружности треугольников AOD и BOC второй раз пересекаются в точке N, описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 второй раз пересекаются в точке P, описанные окружности треугольников A_1OD_1 и B_1OC_1 второй раз пересекаются в точке Q. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

Областной этап
Республиканской олимпиады школьников по математике
2017-2018 учебный год

11 класс

2 тур

Уважаемые участники! На олимпиаде запрещается пользоваться сотовыми телефонами, калькуляторами и прочими электронными приборами. Запрещено списывать. Запрещается выходить из аудитории во время олимпиады.

Время работы: 180 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов

4. Пусть $S_n = \{0, 1, 2, \dots, 4n-1\}$. Подмножество A множества S_n называется редким, если для любого $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ выполняются условия:
$$|A \cap \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}| \le 1,$$
$$|A \cap \{4k-2, 4k-1, 4k, 4k+1, 4k+2\}| \le 2.$$
Найдите количество редких подмножеств. (Здесь $|\mathcal{M}|$ означает количество элементов множества $\mathcal{M}$.)

5. Найти все функции $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, удовлетворяющие при всех $x, y \in (0, +\infty)$ условию $f(x)f\big(yf(x)\big) = f(x+y)$.

6. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 выбраны соответственно на отрезках AO, BO, CO и DO так, что $AA_1 = CC_1$, $BB_1 = DD_1$. Пусть описанные окружности треугольников AOB и COD второй раз пересекаются в точке M, описанные окружности треугольников AOD и BOC второй раз пересекаются в точке N, описанные окружности треугольников A_1OB_1 и C_1OD_1 второй раз пересекаются в точке P, описанные окружности треугольников A_1OD_1 и B_1OC_1 второй раз пересекаются в точке Q. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.