Олимпиада имени Шалтая Смагулова по математике
Второй тур, 6 класс, 19 ноября, 2017 г.

Решения задач.

1. Можно ли из полосок 1×1, 1×2, $\ldots$, 1×13 сложить прямоугольник со сторонами больше 1 (нужно использовать все полоски)? **(4 балла)**

Ответ: да, можно. Этот пример легко подобрать, если подсчитать заранее площадь требуемого прямоугольника: $1+2+\ldots+13=91=13\cdot7$.

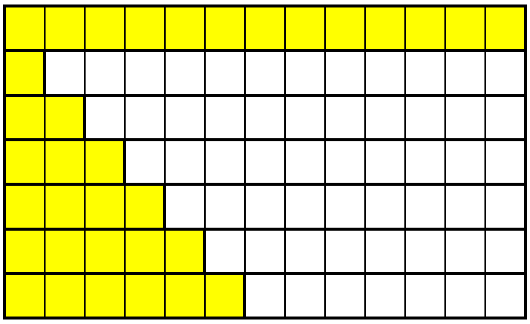

Схема оценивания:

- Посчитана площадь получаемого прямоугольника, но нет примера: 1 балл;
- Верный пример: 4 балла.

2. Среднее арифметическое четырех чисел равно 10. Если вычеркнуть одно из этих чисел, то среднее арифметическое оставшихся трех увеличится на 1, если вместо этого вычеркнуть другое число, то среднее арифметическое оставшихся чисел увеличится на 2, а если вычеркнуть только третье число, то среднее арифметическое оставшихся увеличится на 3. На сколько изменится среднее арифметическое трех оставшихся чисел, если вычеркнуть четвертое число? **(5 баллов)**

Ответ: уменьшится на 6. Из того, что среднее арифметическое четырех чисел равно 10 следует, что сумма этих чисел равна 40. Аналогично, сумма трех чисел (без первого) равна 33, сумма трех чисел (без второго) равна 36, а сумма трех чисел (без третьего) равна 39. Из этих условий, получим: первое число равно 7, второе равно 4, третье равно 1. Таким образом, среднее арифметическое первых трех чисел равно 4, а это на 6 меньше, чем 10.

Аналогичные рассуждения можно провести алгебраически. Обозначив четыре числа через a, b, c и d соответственно, получим четыре равенства: $(a+b+c+d):4=10$, $(b+c+d):3=11$, $(a+c+d):3=12$, $(a+b+d):3=13$. Решением этой системы является четверка чисел: (7, 4, 1, 28).

Схема оценивания:

- Только ответ: 1 балл;
- Верно составлена система всех уравнений: 2 балла;
- Четверка чисел найдена подбором: только 2 балла;
- Полное решение: 5 баллов.

3. Имеются четыре монеты, неразличимые по внешнему виду, но все разного веса. Как с помощью чашечных весов без гирь за пять взвешиваний расположить монеты в порядке возрастания их веса? **(6 баллов)**

Решение. Обозначим монеты через A, B, C и D. Разобьем их по парам (A, B) и (C, D), за два взвешивания определим какая монета этих парах более легкая. Пусть A < B и C < D, тогда возможны только следующие шесть случаев (более легкая монета стоит левее): ABCD, ACBD, ACDB, CABD, CADB, CDAB.

Третьим взвешиванием сравним монеты B и D. Если B < D, то из выше приведенных случаев возможны лишь три: ABCD, ACBD, CABD.

Четвертым взвешиванием сравним A и C. Если A > C, то монеты будут расположены в виде CABD. Если A < C, то монеты могут быть расположены в виде ABCD или ACBD. Поэтому пятым взвешиванием сравнивая монеты B и C окончательно устанавливаем порядок монет. Если B < C, то ABCD, если B > C, то ACBD.

Если же результат третьего взвешивания B > D, то из выше приведенных случаев возможны три других варианта: ACDB, CADB, CDAB.

Четвертым взвешиванием сравним A и C. Если A < C, то монеты будут расположены в виде ACDB. Если A > C, то монеты могут быть расположены в виде CADB или CDAB. Поэтому пятым взвешиванием сравниваем монеты A и D окончательно устанавливаем порядок монет. Если D < A, то CDAB, если D > A, то CADB.

Схема оценивания:

- Разбиение по парам и нахождение наименьшего или наибольшего из них: 1 балл;
- Нахождение самой тяжелой монеты с помощь третьего взвешивания: 2 балла;
- Нахождение самой легкой монеты с помощью третьего взвешивания: 2 балла;
- С помощью четвертого и пятого взвешивания определить порядок монет по возрастанию: 2 балла.

4. Можно ли в клетки таблицы

а) 5×6 **(2 балла)**

б) 6×6 **(5 баллов)**

вписать числа 1 и -1 (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы суммы чисел во всех строчках и столбцах были разными?

Ответ: а) можно, б) нельзя.

а) Пример:

1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1

б) Наименьшее значение, которое может принимать сумма чисел в строчке или столбце таблицы 6×6, равно -6, а наибольшее равно 6. При этом каждая такая сумма может быть только четным числом, поскольку является суммой шести нечетных чисел (четное количество нечетных чисел в сумме дают четное число). Но среди чисел то -6 до 6 существует только 7 четных (-6, -4, -2, 0, 2, 4 и 6). А количество строчек и столбцов в таблице 6×6 равно12. Поэтому при любом заполнении таблицы 6×6 числами -1 и 1 среди ее строчек и столбцов найдутся такие, суммы чисел в которых будут одинаковы.

Схема оценивания:

а) верный пример: 2 балла;

б)

- Найдено наибольшее и наименьшее значение суммы чисел в таблице: 1 балл;
- Доказательство того, что суммы чисел в строках и столбцах будут четными: 2 балла;
- Доказательство того, что количество четных чисел в промежутке от -6 до 6 будет равно 7, а количество сумм – 12: 2 балла.

5. Клетчатый квадрат 2017×2017 разрезали на несколько прямоугольников (по границам клеток). Докажите, что среди них найдётся прямоугольник, периметр которого делится на 4. **(8 баллов)**

Решение. Пойдём от противного: пусть такого прямоугольника не найдётся. Заметим, что периметр любого целоклеточного прямоугольника является чётным числом. Периметр будет делиться на 4 тогда, когда обе стороны прямоугольника одной чётности и не будет в противном случае. Если все прямоугольники имеют периметр, не делящийся на 4, значит они все имеют одну чётную и одну нечётную сторону. В таком случае площадь каждого прямоугольника чётна. Но тогда чётна и сумма их площадей. А сумма их площадей есть площадь квадрата, $2017 \cdot 2017$, то есть нечетное число. Противоречие.

Схема оценивания:

- Замечено, что периметр любого целоклеточного прямоугольника является четным числом: 2 балла;
- В доказательстве от противного доказано, что сумма соседних сторон любого мелкого прямоугольника равна нечетному числу: 1 балл;
- В доказательстве от противного доказано, что соседние стороны любого мелкого прямоугольника имеют разную четность: 1 балл;
- В доказательстве от противного доказано, что площадь любого мелкого прямоугольника равна четному числу: 1 балл;
- В доказательстве от противного доказано, что площадь исходного прямоугольника равна четному числу: 1 балла.
- Указано противоречие: 1 балл.
- Полное решение: 8 баллов.

Олимпиада имени Шалтая Смагулова по математике
Второй тур, 7 класс, 19 ноября, 2017 г.

Решения задач.

1. В магазине продаются 16 говорящих попугаев. Каждый из них либо лжец (всегда врет), либо правдивый (всегда говорит правду). Каждый попугай находится в отдельной клетке. Все клетки одинаковы и расположены на подиуме в виде квадрата 4x4. Когда в магазин зашел покупатель Ерболат, все попугаи хором произнесли: “Среди моих соседей правдивых и лжецов поровну!”. (Соседними считаются попугаи, сидящие в клетках, соседних по стороне)
а) Сколько лжецов могло быть среди этих попугаев? (Укажите все возможные количества) **(3балла)**
б) Если известно, что не все попугаи лжецы, то какое наименьшее количество попугаев может купить Ерболат так, чтобы среди них обязательно нашелся хотя бы один правдивый попугай? **(2балла)**

Ответ: а) 12 или 16 лжецов. б) 1 попугай.

а) Рассмотрим попугаев, сидящих по краям, но не в углу – всего восемь попугаев. Заметим, что каждый из них имеет три соседа. Поэтому они не могут быть правдивыми, поскольку у каждого правдивого попугая обязательно четное число соседей. Поскольку все попугаи, сидящие по краям (кроме угловых) точно лжецы, то и угловые попугаи также являются лжецами, так как у каждого из них по два соседа лжеца.

Итак, все 12 попугаев, сидящих по краям, являются лжецами. Допустим теперь, что в магазине продается хотя бы один правдивый попугай. Тогда он должен быть одним из четырех оставшихся попугаев. БОО он сидит в правом верхнем углу (см. рис.):

л	л	л	л
л			л
л			л
л	л	л	л

л	л	л	л
л	п		л
л			л
л	л	л	л

л	л	л	л
л	п	п	л
л	п	п	л
л	л	л	л

Поскольку у этого попугая уже наверняка есть два соседа-лжеца, то оба других его соседа – правдивые.

Но теперь и оставшийся попугай должен быть правдивым, поскольку из его четырех соседей два правдивых попугая и два лжеца.

Поэтому получается, что если присутствует хотя бы один правдивый попугай, то их ровно 4.

б) Как мы выяснили в пункте а), если в магазине есть хотя бы один правдивый попугай, то их ровно 4, причем, все они сидят в центре. Поскольку Ерболат точно знает, где сидят четыре правдивых попугая, он может просто купить одного из четырех центральных попугаев.

Схема оценивания

а)

- (i) Доказательство того, что крайние, кроме угловых – лжецы – 0,5 баллов;
- (ii) Доказательство того, что угловые попугаи – лжецы – 0,5 баллов;
- (i)+(ii) – 1 балл;
- Доказательство того, что если один из центральных попугаев правдивый, то и все остальные правдивые – 1 балл;
- Упоминание случая, когда нет вообще правдивых попугаев – 1 балл;
- Если упущен ответ – 16 лжецов – минус 1 балл;

б)

- Правильный ответ + полное объяснение – 2 балла
- В остальных случаях – 0 баллов.

2. Можно ли в клетки таблицы

а) 5×6 **(2 балла)**

б) 6×6 **(4 балла)**

вписать числа 1 и -1 (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел во всех строчках и столбцах были разными?

Ответ: а) можно, б) нельзя.

а) Пример:

1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1

б) Наименьшее значение, которое может принимать сумма чисел в строчке или столбце таблицы 6×6, равно -6, а наибольшее равно 6. При этом каждая такая сумма может быть только четным числом, поскольку является суммой шести нечетных чисел (четное количество нечетных чисел в сумме дают четное число). Но среди чисел то -6 до 6 существует только 7 четных (-6, -4, -2, 0, 2, 4 и 6). А количество строчек и столбцов в таблице 6×6 равно 12. Поэтому при любом заполнении таблицы 6×6 числами -1 и 1 среди ее строчек и столбцов найдутся такие, суммы чисел в которых будут одинаковы.

Схема оценивания

а) верный пример: 2 балла;

б)

- Найдено наибольшее и наименьшее значение суммы чисел в таблице: 1 балл;
- Доказательство того, что суммы чисел в строках и столбцах будут четными: 1 балл;
- Доказательство того, что количество четных чисел в промежутке от -6 до 6 будет равно 7, а количество сумм – 12: 2 балла.

3. Чтобы попасть в чудо страну, нужно пройти через девять ворот. Если человек, имеющий какое-то количество денег, пройдет через первые ворота, то количество его денег увеличится на 10%, если пройдет через вторые – то на 20%, …, если через девятые – то на 90%. Известно, что путешественник, имеющий ненулевое количество денег, измеряющееся в целых числах, пройдя через все эти ворота вошел в страну также с целым количеством денег. Могло ли оказаться так, что в начале (перед тем как пройти первые ворота), у него было не более 777777 денег? **(5 баллов)**

Ответ: нет, могло.

Решение. Заметим, что после прохода через первые ворота, количество денег путешественника увеличится в 1,1 раза или то же самое – в $\frac{11}{10}$ раз, пройдя через вторые ворота – в $\frac{12}{10}$ раз, …, пройдя через девятые – в $\frac{19}{10}$ раз. В итоге, его количество денег увеличится в

$A=\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{10}\cdot\ldots\frac{19}{10}=\frac{3^4\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}{2\cdot5^8}$ раз. Следовательно, начальное количество денег путешественника должно делиться на $2 \cdot 5^8 = 781250$, то есть у него не менее 781250 денег. Но $781250 > 777777$.

Схема оценивания

- Замечено, что если число увеличить на 10% (20%, 30%, …), то оно увеличится в 1,1 (1,2, 1,3, …) раза: 1 балл;
- Показано, что в момент входа в чудо страну количество денег увеличится в A раз: 1 балл.
- Показано, начальное количество денег должно делиться на 781250: 2 балла.
- Если в решении допущены арифметические ошибки при вычислении A: снять до 2 баллов.

4. Суммарный возраст десяти учеников, участвующих на олимпиаде, равен 130 годам. Докажите, что существует четверка учеников, сумма возрастов которых будет не меньше 51 года. Считайте, что возраст каждого ученика равен целому числу лет. **(7 баллов)**

Решение. Предположим противное. Тогда сумма возрастов любых четырех учеников не больше чем 50. Пусть $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_9 \le a_{10}$ – возрасты учеников. Тогда получаем, что

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \le 50,$$
$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \le 50.$$

Поэтому получаем, что $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \le 100$.

Тогда $a_1 + a_2 = 130 - (a_3 + a_4 + \cdots + a_9 + a_{10}) \ge 30$. Поскольку $a_2 \ge a_1$, получаем, что $a_2 \ge 15$. Поэтому $15 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_9 \le a_{10}$. Наконец, получаем цепочку неравенств

$$130 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10} \ge a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10} \ge 15 * 9 = 135.$$

Противоречие. Значит, наше исходное предположение неверно, и нужная четверка найдется.

Схема оценивания

(i) Доказательство того, что суммарный возраст двух самых младших учеников хотя бы 30 – 2 балла;

(ii) Доказательство того, что возраст второго самого младшего ученика хотя бы 15 ($a_2 \ge 15$) – 1 балл;

(iii) (i) + (ii) – 3 балла;

(iv) Полное решение – 7 баллов.

5. n телефонов $(n \ge 3)$ соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона выходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски? **(7 баллов)**

Ответ: Три.

Решение: В графе G вершины соответствуют телефонам, а ребра – проводам из условия задачи. Если в G есть три попарно смежные вершины, то для покраски ребер, соединяющих эти вершины, необходимо три различных краски. Докажем, что трех красок достаточно. Выкинем из G изолированные вершины (вершины, не соединенные ребрами с другими вершинами). Оставшийся граф распадается на части (компоненты связности) двух типов: незамкнутые ломанные и циклы. В каждой незамкнутой ломанной и каждом цикле четной длины покрасим ребра в красный и синий, чередуя цвета. В каждом цикле нечетной длины одно ребро покрасим в зеленый, а остальные – в красный и синий, опять же, чередуя их. Итак, мы показали, что трех красок достаточно, а двух может не хватить.

Схема оценивания

- Только ответ – 0 баллов;
- Доказательство того, что необходимо хотя бы три краски – 1 балл;
- Выделение двух типов компонент связности (незамкнутые ломанные и циклы) – 3 балла;
- Доказательство того, что трех красок достаточно – 6 баллов;
- Полное решение – 7 баллов.