**РЕШЕНИЯ**

**Первый уровень**

1. На доске написано 30 последовательных натуральных чисел. Известно, что сумма десяти из них – число простое. Может ли сумма оставшихся 20 чисел быть простым числом?

**Решение.**

Сумма тридцати последовательных чисел$-$ число нечетное, так как это сумма 15 четных и 15 нечетных чисел. Простое число, являющееся суммой десяти или двадцати натуральных чисел $–$ число нечетное, так как больше двух, а сумма двух простых чисел, отличных от двух, число четное. Поэтому, сумма оставшихся 20 чисел не может быть простым числом.

1. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 2000.

**Решение.**

Число 2000 разлагается на простые множители следующим образом 2000 = 2$∙$2$∙$2$∙$2$∙$5$∙$5$∙$5. Наименьшее число 25558.

Ответ: 25558

1. В компании из 20 человек некоторые знакомы друг с другом. Оказалось, что среди любых 13 человек этой компании число пар знакомых одно и то же. Сколько всего пар знакомых может быть во всей компании?

**Решение**.

Если выбрать любых 14 человек из этой компании, то каждый из них знает одинаковое число знакомых из этих четырнадцати человек. Допустим, что найдутся двое людей, из этой компании, которые не знают друг друга. Назовём их А и В. Пусть некий человек С не принадлежит этой компании. Заменим человека А на С, число знакомых у В не изменилось. Как следует из условия задачи, каждый из этих четырнадцати человек имеют одинаковое число знакомых, тогда человек С знает ровно тех же людей, что и А.Заменим теперь, теперь В на А. Как нетрудно видеть, число знакомств в этом случае уменьшится. Следовательно, среди этих четырнадцати человек не все будут иметь одинаковое число знакомых. Получили противоречие с условием. Следовательно, наше предположение не верно. То есть, не существует двух человек, не знающих друг друга, то есть в этой компании все знают друг друга. Тогда число знакомств равно $\frac{20∙19}{2}$=190.

Ответ:190 пар.

1. Из шахматной доски 8$×$8 вырезали 12 доминошек (доминошка$-$прямоугольник 1$×$2). Верно ли, что в оставшейся части всегда можно вырезать прямоугольник 1$×3$?

**Решение.**

Не всегда.



1. Если идти вниз по движущемуся эскалатору, то на спуск потратишь 1 минуту. Если увеличить собственную скорость в два раза, то спустишься за 45 секунд. За какое время можно спуститься, стоя на этом эскалаторе неподвижно?

**Решение.**

Пусть длина эскалатора равна *a*

*v1* $–$ скорость человека,

*v2* $–$ скорость эскалатора.

Тогда *(v1+v2)60=a*

 *(2v1+v2)45=a*

Отсюда *v1*=$\frac{a}{180}$ , *v2*=$\frac{a}{90}$ , тогда $\frac{a}{v\_{2}}$ = 90 (секунд).

Ответ: 90 секунд.

**Второй уровень.**

1. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади прямоугольного треугольника. Найти меньший угол прямоугольного треугольника.

**Решение.**

 **M**

 **K**

 **A**

 **C B**

Построим на гипотенузе AB треугольника ABC равносторонний треугольник ABM. Проведем перпендикулярно AM отрезок BK. По условию SABC=$\frac{1}{2}$ SABM. Так как SAKB=SKBM то SABC=SAKB. Кроме того, $∆$AKB - прямоугольный и имеет общую с $∆$ABC гипотенузу. Следовательно, $∆$ABC=$∆$AKB. Тогда ABK= CBA=30$°$ .

Ответ: 30$°$

1. Найти три натуральных числа таких, что сумма всевозможных двузначных чисел, составленных из этих цифр, равняется 231.

**Решение.**

Пусть *a, d, c*- - искомые натуральные числа. Предположим, что все числа различны. Тогда

 $\overbar{ab}$+$\overbar{ac}$+$\overbar{bc}$+$\overbar{ba}$+$\overbar{ca}$+$\overbar{cb}$+$\overbar{aa}$+$\overbar{bb}$+$\overbar{cc}$=

10a+b+10a+c+10b+c+10b+a+10c+a+10c+b+11a+11b+11c=33(a+b+c)=231

a+b+c=7. Существует лишь единственная тройка различных натуральных чисел удовлетворяющих этому условию(1, 2, 4).

Ответ: (1, 2, 4).

1. В куче лежит *75* спичек. Двое играющих берут по очереди от одной до десяти спичек за ход. Взявший последнюю спичку получает премиальный коробок с 60 спичками. Выигрывает тот, у кого с учетом премии в сумме окажется больше спичек. Докажите, что начинающий игрок может играть так, чтобы не проиграть, независимо от ходов соперника.

**Решение.**

Первым ходом первый игрок берет 9 спичек. А затем последовательно оставляет сопернику 55, 44, 33, 22, 11 спичек. Таким образом первый игрок берет последнюю спичку и получив дополнительные 60 спичек , получает не менее 75 спичек, второй же игрок получает не более 60 спичек.

1. Муравей находится в вершине проволочного куба и хочет попасть в противоположную вершину, сделав ровно 5 «ходов» по ребрам. Сколькими способами он может это сделать? (По одному ребру можно ходить и несколько раз).

**Решение.**

 **A** 8

 5 7

16

24

 12 3

9 11

 10 **B**

Муравей находится в точке **A** ему необходимо перейти по ребрам в точку **B** , первый ход он может сделать по ребрам 1, 5 и 8. Рассмотрим случай когда муравей сделал ход по ребру 1, случаи движения по ребрам 5 и 8 абсолютно аналогичны. Запишем все возможные движения муравья в виде следующей схемы.

 **А**

 1

 1 9 12

 1 5 8 10 2 9 12 4 11

 9 12 2 6 4 7 10 4 3 2 6 9 12 9 12 4 7 11 10 3

 10 11 10 3 11 3 10 113 10 3 10 11 10 11 11 3 11 10 3

 **В**

Таким образом, общее число ходов равно 60.

Ответ:60.

1. Двое по очереди ставят крестики в клетки доски размером 4×4.Проигрывает тот, после чьего хода образуется квадрат 2×2, в каждой клетке которого стоит крестик. Кто выиграет: начинающий или его партнер, и как нужно играть, чтобы выиграть?

**Решение.**

Разделим доску на две равные части горизонтальной

прямой. Второй игрок повторяет ходы первого в

 противоположной части доски.

Ответ: Второй

**Третий уровень**

1. Найти наименьшее натуральное n , такое, что 2n можно представить в виде суммы пяти различных простых чисел.

**Решение.**

Так как 2n –число четное, то одно из чисел также четное, так как в противном случае, сумма трех нечетных чисел была бы числом нечетным. Сумма первых пяти простых чисел равна

2+3+5+7+11=28

Следовательно, 2n$>$ 28, число 32 нельзя представить в вид суммы пяти простых чисел, в этом можно убедиться простым разбором случаев,

64=2+3+5+7+47

64=26

Ответ: n=6.

1. Десятичная запись некоторого натурального числа содержит 2013 единиц, 2013 двоек, 2013 четверок и столько же нулей. Может ли такое число быть четвертой степенью натурального числа?

**Решение.**

Сумма цифр числа равна 2013$∙$7,следовательно число делится на 3, но не делится на 9, поэтому квадратом быть не может.

3.Числа от 1 до 12 разбили на две группы по шесть чисел в каждой. Пусть A и B произведение чисел в каждой группе. Известно, что A делится на B .Найти все возможные значения $\frac{A}{B}$ .

**Решение.**

Максимальное значение $\frac{A}{B}$ достигается в случае, если

A={7, 8, 9, 10, 11, 12}, B={1, 2, 3, 4, 5, 6} и равно 12$∙$7$∙$11. Очевидно, что числа 7 и 11всегда находятся в числителе. Тогда $\frac{A}{B}$ =*a*$∙$77, где

*a* $\leq $12. Нетрудно видеть, что *а* является делителем числа 12, так, как если *а* делится на 5, то 5 и 10 должны стоять в числителе, тогда *а* будет делится на 25, следовательно *а* будет больше 12, что невозможно. Итак, возможные значения равны 1, 2, 3, 4, 6. Но а делится на 3,т.к. в разложении числа А$∙$В 5 троек и 10двоек следовательно по крайней мере одна тройка есть в числителе и в числителе должно быть четное число двоек. Следовательно, *а* =12 или *а=*3.Второй случай возможен если А ={6, 7, 8, 9, 10, 11}, B={1, 2, 3, 4, 5, 12}.

Ответ: 12$∙$77, 3$∙$77

4.Сколько решений имеет уравнение

$x\left[x\right]\left\{x\right\}$=*a, 0*$<$*a*$<$*1,*

если *0* $<$ *x* $<$ *2013.*

**Решение.**

Пусть *x=n+y,* где *n=*[*x*], *y=* {*x*}, тогда уравнение можно записать в виде

(*n +* *y*)$∙$*y*$∙$*n=a*

Для каждого *n* (*n*$>$*0*) для каждого *а* (*0*$<$*a*$<$*1*) существует ровно один *y* такой, что *0*$<$*y*$<$*1.* Это легко можно доказать, построив график либо исследовать корни квадратного уравнения по обычным формулам для нахождения корней квадратного уравнения. Поскольку *n* изменяется от 1 до 2012 , следовательно соответствующих корней также будет 2012.

Ответ:2012.

5.Сколько существует двадцатизначных натуральных чисел таких, что если его цифры записать в обратном порядке, то полученное число будет ровно в три раза больше первоначального.

**Решение.**

Пусть N – число удовлетворяющее условию задачи.

 *a* – первая цифра числа N.

 *b* – последняя цифра числа N.

Тогда 3N начинается с цифры *b* и оканчивается цифрой *а*, которая может быть равна только 1, 2 или 3.

 Очевидно, что *b*$∙$1019$<$3N$<$1020 и также 3*а*$∙$1019$<$3N.

Отсюда, *b*$\geq $3*, b*$\leq $3*a+*3*.* Когда *а* пробегает значения 1, 2, 3 то, *b* в этом случае пробегает значения 7, 4, 1. Однако неравенства написанные выше в этом случае не выполняются, следовательно, такого числа не существует.

Ответ: 0.